Séminaire de Mathématiques et Informatique

Université Djilali Liabès - Sidi Bel Abbès - le 10 février 2024

Principe de Hasse de deux classes d'intersection de deux quadriques dans $\mathbb{P}^7$

Ali DEBACHE

Faculté de mathématiques, USTHB, ALger

Résumé :

En 1986 un travail fait par J.L.Colliot-Thèlène, Sir P.Swinnerton-Dyer et J.J.Sansuc montre que les intersections de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n$ pour $n \geq 8$ vérifient le principe de Hasse. Ce travail vient d'une question qui m'a été posée par Jean-Louis Colliot-Thèlène en 1988 : "Est-il possible de savoir si c'est aussi vrai pour $n = 7$?

Soit $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels, le théorème d'Ostrowski nous dit que sur $\mathbb{Q}$ hormis la valeur absolue classique, il existe aussi des valeurs absolues $p-$adiques qui à chaque p associe $||_p$. Cette valeur absolue se distingue de la valeur absolue réelle par le fait qu'au lieu d'avoir l'inégalité triangulaire, on a,

$|a+b|_p \leq max\left(|a|_p, |b|_p\right), \ \forall a, b \in \mathbb{Q}.$

Si on complète $\mathbb{Q}$ avec cette valeur absolue, on obtient le corps des nombres $p-$adiques $\mathbb{Q}_p$, si k est un corps de nombres(k est obtenu comme le plus petit corps contenant $\mathbb{Q}$ et un nombre fini de nombres algébriques), alors la valeur absolue $||_p$ peut être étendue à k. En 1926, Minkowski puis Hasse, montrèrent que:

$(Q(x_0, ..., x_n) = 0$ admet des solutions dans $k) \Longleftrightarrow$

$(Q(x_0, ..., x_n) = 0$ admet des solutions dans tout complété de $k)$,

où $Q(x_0, ..., x_n) \in k(x_0, ..., x_n)$ est une forme quadratique, la condition nécessaire est évidente.

En effet, comme k est inclus dans tous ces complétés, donc si une variété algébrique X (elle est obtenue d'après le théorème de Hilbert comme zéro d'un nombre fini de polynômes à une ou plusieurs variables) admet des solutions sur k, elle admet des solutions dans tout complété de k, si X vérifie la condition inverse, on dira qu'elle vérifie le principe de Hasse.

Soient $Q_1(x_0, ..., x_7), Q_2(x_0, ..., x_7) \in k(x_0, ..., x_7)$ deux formes quadratiques et

$X = \left\{ (x_0, ..., x_7) \in k^8 / \ Q_1 (x_0, ..., x_7) = Q_2 (x_0, ..., x_7) = 0 \right\}$ l'intersection de deux quadriques obtenues à partir de $Q_1 (x_0, ..., x_7)$ et $Q_2 (x_0, ..., x_7)$, on montre dans ce travail que si X contient une conique C(et dans ce cas X contient un plan), ou bien si X est lisse(c'est à dire, si X n'a pas de points doubles) et si le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ du pinceau $Q_\lambda (x_0, ..., x_7) = Q_1 (x_0, ..., x_7) + \lambda Q_2 (x_0, ..., x_7)$ est tel qu'il existe un unique $\lambda_0 \in \mathbb{Q}$ vérifiant $P(\lambda_0) = 0$ (et dans ce cas aussi X contient un plan) alors X vérifie le principe de Hasse, reste le cas général, qui jusqu'à ce jour n'est pas encore résolu.

Pourquoi le principe de Hasse est-il important? Théoriquement le théorème de Weil-Lang-Nisnevic nous dit qu'en dehors d'un nombre fini de places, X admet des solutions, pour les autres places, si $k = \mathbb{Q}$ par exemple, on peut travailler sur $\mathbb{Z}$, on réduit alors *modulo* p, et si X possède des racines, on les remonte avec le lemme de Hensel, reste à le faire enfin pour $\mathbb{R}$. Reste le problème d'effectivité et il n'est pas évident du tout, même si on arrive à montrer que X admet des solutions, on reste sur notre faim, on voudrait bien avoir une idée sur ces points, est-ce qu'ils sont finis? infini? On voudrait connaître leur structure (s'ils sont infinis) et, enfin, les calculer.

Keywords : Intersections de deux quadriques, Nombres p-adiques, Principe de Hasse, Théorème d'Ostrowski

Mathematics Subject Classification : 11D72, 11G50, 11P55, 11Sxx, 12Jxx, 14J45.

References

[1] Arala, N., "The analytic Hasse Principle for certain singular intersections of quadrics in $\mathbb{P}^9$" arXiv:2310.15969v1 (oct. 2023)

[2] Lang, S., "Algebraic Number Theory (Section VI.1. : Hasse principle)", Springer, (1994)

[3] Marmon, O., Vishe, P. , "On the Hasse principle for quartic hypersurfaces", Duke Math. J. 168 (14) 2727–2799, (2019)

[4] Neukirch, J., "Algebraic Number Theory (Chapter V : Hasse-Minkowski Theorem)", Springer, (1999)

[5] Niven, I., Zuckerman, H.S., Montgomery, H.L., "An introduction to the theory of numbers (Section 12.3. : Ostrowski Theorem)", John Wiley & Sons, (1991)

[6] Robert, A., "A Course in p-adic Analysis", Springer, (2000)