Séminaire de Mathématiques et Informatique

Université Djilali Liabès - Sidi Bel Abbès - le 03 décembre 2022

Existence globale de formes différentielles holomorphes exactes à paramètres complexe

Boudekhil CHAFI

Laboratoire de Mathématiques (LDM). Faculté des Sciences Exactes (FSE).
Université de Sidi Bel Abbès

Résumé : Dans cette présention, on étudie le problème de Kajiwara sur l'éxistence globale de formes différentielles holomorphes exactes avec paramètres complexes.

Keywords : Fonction Holomorphe, Variété de Stein, Cohomologie.

2010 Mathematics Subject Classification :
Primary : 32A07.
Secondary : 32D10, 32Q28.

1. Introduction

Soient S une variété analytique complexe et Z une variété analytique complexe de dimension m. Soit Ω un domaine de $S \times Z$. Soit $\mathcal{O} = \mathcal{O}^0_{s,z}$ le faisceau sur Ω des germes de fonctions holomorphes des variables complexes $s \in S$ et $z \in Z$, et pour $p = 1, \dots, m$, $\mathcal{O}^p_{s,z}$ le faisceau sur Ω des germes de formes différentielles holomorphes de degré p de la forme

$$f = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq m} f_{i_1 i_2 \cdots i_p} dz_{i_1} \wedge dz_{i_2} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \ ,$$

où les coefficients $f_{i_1 i_2 \cdots i_p}$ sont dans $\mathcal{O}$. Alors, chaque $\mathcal{O}^p_{s,z}$ est un faisceau de $\mathcal{O}$-modules localement libre et par conséquent un faisceau analytique cohérent sur Ω.

On définit la différentielle de f par rapport aux variables $z_1, z_2, \dots, z_m$ par

$$d_z^p f = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le m} d_z f_{i_1 i_2 \cdots i_p}(s,z) \wedge dz_{i_1} \wedge dz_{i_2} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}$$

où

$$d_z f_{i_1 i_2 \cdots i_p} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j} f_{i_1 i_2 \cdots i_p}(s,z) dz_j,$$

Pour un germe de fonctions holomorphes $g \in \mathcal{O}_{s,z}^0$, on pose

$$\mathrm{D}g = d_z^0 g = d_z g = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial z_j} dz_j.$$

Alors, $\mathrm{D} : \mathcal{O}_{s,z}^0 \to \mathcal{O}_{s,z}^1$ est un morphisme de faisceaux. On note $\mathrm{Ker}\,\mathrm{D}$ le noyau de D. D'après [2, lemme 1], on a la suite exacte de faisceaux sur Ω:

$$0 \to \mathrm{Ker}\,\mathrm{D} \to \mathcal{O}_{s,z}^0 \xrightarrow{d_z^0} \mathcal{O}_{s,z}^1 \xrightarrow{d_z^1} \cdots \xrightarrow{d_z^{m-1}} \mathcal{O}_{s,z}^m \xrightarrow{d_z^m} 0 \qquad \text{(I)}$$

2. Théorème

Theorem 2.1. *Soient S une variété analytique complexe de Stein et Z une variété analytique complexe de dimension n et m respectivement. Soit Ω un domaine de Stein de $S \times Z$. Alors les conditions suivantes (1), (2) et (3) sont équivalentes:*

(1) *Pour tout $p = 1, \ldots, m$ et tout $g \in H^0(\Omega, \mathcal{O}_{s,z}^p)$ avec $d_z^p g = 0$, il existe $f \in H^0(\Omega, \mathcal{O}_{s,z}^{p-1})$ tel que $d_z^{p-1} f = g$.*

(2) *$(\tilde{\Omega}, \varphi)$ est un domaine de Riemann sur S de Stein et $H^q(\Omega(s,z), \mathbb{C}) = 0$, pour tout $q = 1, \ldots, m$ et tout $(s,z) \in \Omega$.*

(3) *$H^p(\Omega, \mathrm{Ker}\,\mathrm{D}) = 0$, pour tout $p = 1, \ldots, m$.*

3. Références de base

References

[1] N. Buchdahl *On the relative de Rham sequence*, Proc. Amer. Math. Soc., 87, (1983), pp. 363–366.

[2] J. Kajiwara & S. Ohgai *On a Problem of Pinčuk* , Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A, Vol. 37, No. 2, (1983), pp. 153–173.

[3] J. Kajiwara & S. Ohgai *Localization of Global Existence of Holomorphic Exact Forms with Complex Parameters*, Math. Rep. , XIV-1, (1983), pp. 23–40.

[4] J.P. Serre *Quelques Problème Globaux Relatifs aux Variétés de Stein*, Colloque Fonct. Plus. Vab., (1953) Bruxelles.