



UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

Electricité

Cours et travaux dirigés 1 année/

Ecole Supérieure de l'Informatique (ESI)

Dr. Zana KARI

SOMMAIRE

CHAPITRE I : ELECTROKINETIQUE

I RAPPEL SUR L'ELECTROSTATIQUE	1
I-1 Définition d'un conducteur en équilibre électrostatique	1
I-2 Quelques propriétés des conducteurs en équilibre.....	1
a) <u>Lignes de champ</u>	1
b) <u>Distribution des charges</u>	1
c) <u>Capacité d'un conducteur</u>	2
d) <u>Energie</u> <u>emmagasinée</u>	3
I-3 Courant électrique.....	3
a) <u>Origine du courant</u> <u>électrique</u>	3
b) <u>Courant permanent continu</u>	4
I-4 Le condensateur.....	5
a) <u>Définition</u>	5
b) <u>Symbole et formule</u> <u>associés</u>	5
c) <u>Impédance</u> <u>capacitive</u>	5
d) <u>Energie stockée</u>	5
e) <u>Loi d'association</u>	5
I-5 La loi d'ohm.....	8
a) <u>Lois d'ohm en continue</u>	8
b) <u>La loi d'ohm en alternatif</u>	8
c) <u>La loi de joule</u>	8
I-5 La résistance.....	8
a) <u>En série</u>	9
b) <u>En parallèle</u>	9
II LOI DE KIRCHOFF.....	10
II-1 Introduction.....	10

II-2 Loi des nœuds.....	10
II-3 Loi des mailles.....	11
III CHARGE ET DECHARGE D'UN CONDENSATEUR.....	12
III-1 Montage.....	12
III-2 Charge d'un condensateur.....	13
III-3 Décharge d'un condensateur.....	14
Exercice.....	15

CHAPITRE II : COURANT ALTERNATIF

I RAPPEL.....	17
I-1 Rappels mathématiques sur les nombres complexes.....	17
a) <u>Module et argument</u>	17
b) <u>Propriétés des opérations entre nombres complexes</u>	17
I-2 Magnétismes.....	18
I-3 Induction magnétique.....	18
I-4 Flux magnétique.....	18
I-5 Self inductance.....	19
I-6 Loi de Faraday.....	19
II COURANT ALTERNATIF.....	19
II-1 Définition.....	19
II-2 Période d'un signal.....	20
II-3 Valeur moyenne et valeur efficace de la tension.....	20
a) <u>Valeur moyenne ou U_{moy}</u>	20
b) <u>Valeur efficace U_{eff} ou simplement U</u>	20
III NOTATION COMPLEXE.....	21
IV PHASE ET DEPHASAGE.....	21
IV NOTION D'IMPEDANCE.....	22
IV-1 Impédance complexe d'un dipôle passif.....	23
a) <u>Le dipôle résistif</u>	23
b) <u>Le dipôle capacitif</u>	23
c) <u>Le dipôle inductif</u>	24
V ASSOCIATION D'IMPEDANCES.....	25
VI RESONANCE SERIE ET PARALLELE.....	25
VI-1 Définition de la résonance.....	25

VI-2 Résonance série.....	26
a) <u>Montage</u>	26
b) <u>Principe de la résonance</u>	26
c) <u>Courbes de résonance</u>	27
d) <u>Coefficient de surtension</u>	28
VI-3 Résonance parallèle.....	29
a) <u>Montage</u>	2
9	
b) <u>Principe de la résonance</u>	29
Exercice.....	30

CHAPITRE III : RESEAUX ELECTRIQUES

I DEFINITION.....	33
II LOI DE DIVISEUR DE COURANT ET DIVISEUR DE TENSION.....	33
II-1 Diviseur de tension.....	33
II-2 Diviseur de courant.....	34
III NOTION DE SOURCES (LIEES ET INDEPENDANTES).....	35
IV THEOREME DE SUPERPOSITION.....	35
V THEOREME DE THEVENIN ET NORTHON.....	36
V-1 Introduction.....	36
V-2 Théorème de THEVENIN.....	37
V-3 Théorème de NORTHON.....	38
VI-4 Dualité Thévenin – Norton.....	39
VII THEOREME DE MILMANN.....	39
VIII- THEOREME DE KENNELY.....	40
Exercice.....	42

CHAPITRE IV : LES QUADRIPOLES

I DEFINITION.....	44
II REPRESENTATION MATRICIELLE D'UN QUADRIPOLE.....	44

II-1 Matrice impédance.....	44
II-2 Matrice admittance.....	46
II-3 Matrice hybrides.....	47
II-4 Matrice de transfert.....	49
III CARACTERISTIQUES D'UN QUADRIPOLE EN CHARGE ET ATTAQUEE PAR UNE SOURCE DE TENSION REELLE.....	50
III-1 Impédance d'entrée.....	50
III-2 Impédance de sortie.....	51
III- 3 Gain en tension.....	51
III-4 Gain en courant.....	52
IV ASSOCIATION DE QUADRIPOLES.....	53
IV-1 Association en série de deux quadripôles.....	53
IV-2 Association en parallèle de deux quadripôles.....	54
IV-3 Association en cascade de deux quadripôles.....	54
IV-4 Quadripôles entrée série-sortie parallèle.....	56

CHAPITRE V : DIAGRAMME DE BODE

I DEFINITION.....	57
II FONCTION DE TRANSFERT.....	57
III ANALYSE FREQUENTIELLE OU HARMONIQUE.....	58
IV ECHELLE LOGARITHMIQUE.....	59
V FORME DE BODE D'UN SYSTEME LINEAIRE DU PREMIER ORDRE.....	59

CHAPITRE VI : TRANSFORMEE DE LAPLACE

I INTRODUCTION.....	63
II LA TRANSFORMATION DE LAPLACE.....	63
III L'INVERSE DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE.....	63
IV PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE.....	63
V TABLEAU ELEMENTAIRE DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE.....	65
V APPLICATION DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE A LA RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES.....	66

TRAVAUX DIRIGES

FICHE TD N°1.....	69
FICHE TD N°2.....	72
FICHE TD N°3.....	74
FICHE TD N°4.....	76
FICHE TD N°5.....	78
FICHE TD N°6.....	79

BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE I : ELECTROKINETIQUE

I RAPPEL SUR L'ELECTROSTATIQUE

I- 1 Définition d'un conducteur en équilibre électrostatique

Un conducteur est un corps à l'intérieur duquel les charges libres peuvent se déplacer. Un conducteur électrique en équilibre électrostatique est un conducteur qui n'est parcouru par aucun courant. Cela signifie que toutes les charges électriques libres internes au conducteur sont « immobiles ». C'est-à-dire que les charges intérieures ne sont soumises à aucune force (champ électrostatique nul).

A l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre : $\vec{E} = \vec{0}$

Si le champ à l'intérieur du conducteur est nul, alors le conducteur à l'équilibre électrostatique est **équipotentiel** puisque le champ dérive d'un potentiel, cela implique qu'un conducteur à l'équilibre électrostatique est équipotentiel.

I-2 Quelques propriétés des conducteurs en équilibre

e) Lignes de champ

Nous avons vu qu'à l'intérieur d'un conducteur (chargé ou non), le champ électrostatique total est nul. Mais ce n'est pas forcément le cas à l'extérieur, en particulier si le conducteur est chargé. Puisqu'un conducteur à l'équilibre est équipotentiel, cela entraîne alors que, sa surface étant au même potentiel, le champ électrostatique est normal à la surface d'un conducteur.

Par ailleurs, aucune ligne de champ ne peut « revenir » vers le conducteur. En effet, la circulation du champ le long de cette ligne impose l'équation suivante

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

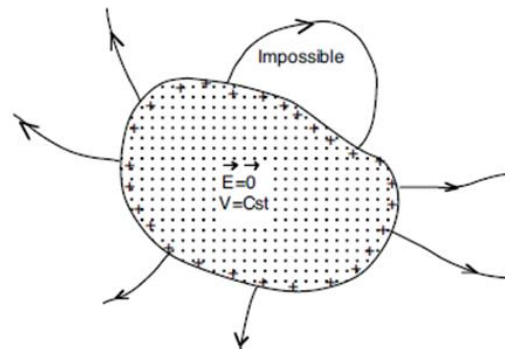


Figure 1 : Représentation des lignes de champs à l'intérieur du conducteur

f) Distribution des charges

Si un conducteur est chargé, où se trouvent les charges non compensées? Supposons qu'elles soient réparties avec une distribution volumique ρ . Prenons un volume quelconque V situé à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre électrostatique. En vertu du théorème de Gauss, on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_s \vec{E} d\vec{s} = \oint_v \frac{\rho}{\epsilon_0} dv = 0 \\ \rho = 0 \end{array} \right.$$

Puisque le champ E est nul partout, cela signifie que $\rho = 0$ (autant de charges + que de charges -) et de fait, qu'à l'équilibre, aucune charge non compensée ne peut se trouver dans le volume occupé par le conducteur. Toutes les charges non compensées se trouvent nécessairement localisées à la surface du conducteur. Ce résultat peut se comprendre par l'effet de répulsion que celles-ci exercent les unes sur les autres. A l'équilibre, les charges tendent donc à se trouver aussi éloignées les unes des autres qu'il est possible de le faire.

g) Capacité d'un conducteur

Soit un conducteur à l'équilibre électrostatique chargé avec la densité surfacique σ et porté au potentiel V . Celui-ci s'écrit

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_s \frac{\sigma ds}{r}$$

La charge totale répartie sur la surface est :

$$Q = \oint_s \sigma ds$$

Le système considéré est caractérisé par les paramètres suivants σ , Q et V .

Si on multiplie la densité surfacique par un coefficient constant a , on obtient une nouvelle charge totale $Q' = a.Q$ et un nouveau potentiel $V' = a.V$. On a ainsi un nouvel état d'équilibre électrostatique, parfaitement défini. On voit donc que, quoi qu'on fasse, tout état d'équilibre d'un conducteur isolé (caractérisé par Q et V) est tel que le rapport Q/V reste constant (cela résulte de la linéarité de Q et V en fonction de σ). Le coefficient de proportionnalité entre la charge totale et le potentiel du conducteur est appelé la **capacité** C . Donc la capacité électrostatique d'un conducteur à l'équilibre est définie par $C = \frac{Q}{V}$

Où Q est la charge électrique totale du conducteur porté au potentiel V . L'unité de la capacité est le Farad (symbole F).

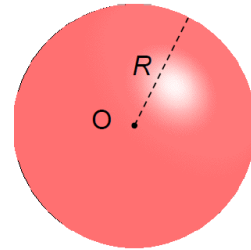
- La capacité est une grandeur positive, elle dépend du matériau (à travers sa permittivité diélectrique de celui-ci) et de la géométrie du conducteur.
- On utilise généralement le pico-Faraday (pF), le nano-Faraday (nF) et le micro-Faraday (μF).

Exemple : Capacité d'une sphère chargée

$$V = V_{\text{surf}} = V_{\text{sphère}} = V(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_s \frac{\sigma ds}{R}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \iint_s \sigma ds$$

$$\text{D'autre part : } Q = \iint_s \sigma ds \text{ d'où : } C = 4\pi\epsilon_0 R$$



h) Energie emmagasinée

Soit C la capacité propre du condensateur, Q sa charge et V son potentiel dans un état d'équilibre donné. L'énergie interne est mesurée soit par :

- ✓ Le travail qu'il faut fournir pour charger le conducteur.
- ✓ Ou bien par le travail des forces électrostatiques mis en jeu au cours de la décharge du conducteur.
- ✓ Ou encore, elle représente la somme des variations d'énergie potentielle subies par toutes les charges au cours de la charge du conducteur.

D'une façon générale, l'énergie potentielle d'une distribution de charge à la surface d'un conducteur s'exprime de la manière suivante :

$$E_p = \frac{1}{2} \iint_s \sigma(M) V(M) ds$$

Ou encore partant de l'énergie potentielle élémentaire donnée par :

$$\begin{cases} dE_p = V dq \\ Q = C * V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_p = \int_0^Q V dq \Rightarrow E_p = \int_0^Q \frac{Q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \\ V = \frac{Q}{C} \end{cases}$$

$$\text{Il s'ensuit donc que } E_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q V$$

(Cette énergie est positive)

I-2 Courant électrique

c) Origine du courant électrique

Soient deux conducteurs A et B, initialement en équilibre électrostatique, portant des charges Q_A et Q_B et dont les potentiels respectifs sont V_A et V_B tels que $V_A > V_B$ par exemple. Dans ces conditions, un champ électrique E existe entre A et B. Lorsqu'on relie les conducteurs A et B par un fil conducteur, l'équilibre se rompt et un mouvement de charges électriques apparaît, sous l'action d'une force électrique $F = q \vec{E}$

Ce mouvement se poursuit jusqu'à l'établissement d'un nouvel état d'équilibre dans le nouveau conducteur formé par A, B et le fil (Figure 2b). Cette circulation de charges correspond au passage d'un courant électrique dans le fil de connexion. Ce courant est *temporaire*.

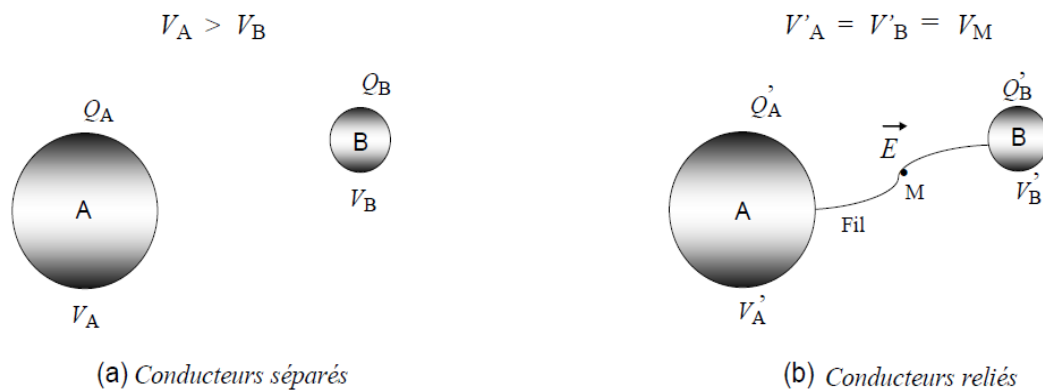


Figure 2 : Déplacement du courant entre deux conducteurs

d) Courant permanent continu

Pour avoir une circulation permanente du courant électrique, il faut maintenir un état de déséquilibre entre les deux conducteurs A et B lorsqu'ils sont reliés. A cet effet, il est nécessaire d'amener de façon continue des charges sur l'un des conducteurs. Ceci peut être réalisé à l'aide d'appareils que l'on appelle générateurs. Un courant continu permanent correspond à un déplacement ininterrompu de charges libres.

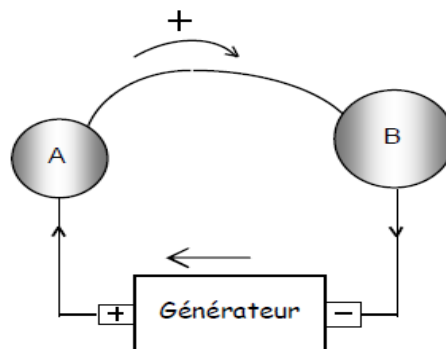


Figure 3 : Circulation du courant

I-3 Le condensateur

f) Définition

Un condensateur est un composant constitué de deux armatures conductrices (appelées « électrodes ») et séparées par un isolant (ou « diélectrique »). Sa propriété principale est de pouvoir stocker des charges électriques. Le condensateur est caractérisé par le coefficient de proportionnalité entre charge et tension appelé capacité électrique et exprimée en farads (F).

g) Symbole et formule associés

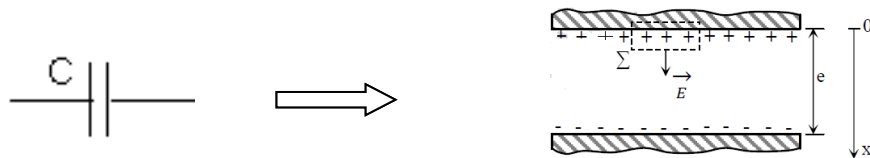


Figure 4 : Symbole d'un condensateur

Soit l'épaisseur e . On a d'après le théorème de Gauss

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \text{cste}$$

$$dV = -\vec{E} d\vec{l} = -E dx \Rightarrow V = \frac{\sigma}{\varepsilon} d$$

$$\text{Or } \sigma = \frac{Q}{S}$$

Remplaçons C par son expression et on aura par la suite :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon S}{d}$$

$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

C : Farads (F)

S : section (m^2)

d : distance (m)

ε : constant diélectrique ($\text{As V}^{-1}\text{m}^{-1}$)

Exercice

Un condensateur plan a des armatures de surface « S » et de distance « d ». On applique entre les deux plaques une différence de potentiel $V_0=500$ V et en intercalant entre les deux plaques une lame d'un diélectrique de permittivité ϵ_r , la différence de potentiel (d.d.p) passe à $V_1=100$ V.

1. Calculer la capacité du condensateur après introduction du diélectrique puis en déduire la valeur de ϵ_r .
2. Déterminer la charge q_i induite sur chacune des faces du diélectrique.

On donne : $S=400$ cm² et $d=5$ mm.

h) Impédance capacitive

L'intensité qui circule dans un condensateur, ne dépend pas directement de la tension aux bornes de ce condensateur, mais de la variation de cette tension. Ainsi, on écrit généralement l'équation (en convention récepteur, q étant la charge de l'armature sur laquelle arrive le courant i) :

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

avec :

Q : la charge de l'armature en coulombs,

t : le temps en secondes.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{q}{V} \Rightarrow Q = CV$$

Ce qui conduit à écrire que le courant $i = C \frac{du}{dt}$. On peut ainsi en déduire l'impédance du condensateur alimentée par une tension fonction périodique du temps :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{jC\omega} = -\frac{j}{C\omega}$$

Ces relations montrent bien qu'un condensateur se comporte comme un circuit ouvert (impédance infinie) pour une tension continue et tend à se comporter comme un court-circuit (impédance nulle) pour les hautes fréquences.

i) Energie stockée

Un condensateur stocke de l'énergie sous forme électrique. Cette énergie E (joules) s'exprime en fonction de sa capacité C (farads) et de sa charge Q (coulombs) (ou de sa tension U) selon :

$$E = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

j) Lois d'association

Association en parallèle

Lorsque deux condensateurs sont placés en parallèle, donc soumis à la même tension, le courant à travers cet ensemble est la somme des courants à travers chacun des condensateurs.

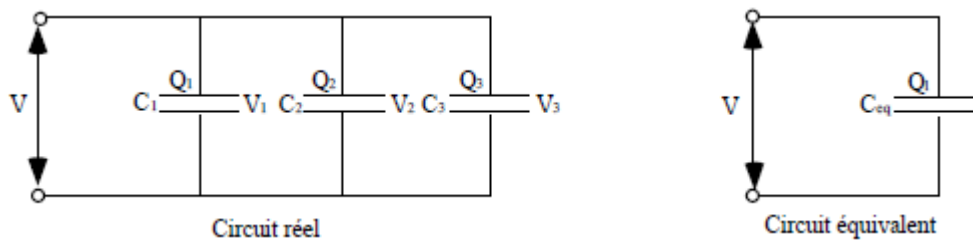


Figure 5 : Condensateur en parallèle

Ceci a pour conséquence que la charge électrique totale stockée par cet ensemble est la somme des charges stockées par chacun des condensateurs qui le composent :

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2) V = C_{eq} V$$

$$\text{Donc } C_{eq} = (C_1 + C_2)$$

Ce raisonnement est généralisé sur n condensateurs en parallèle. Le condensateur équivalent à n condensateurs en parallèle a pour capacité la somme des capacités des n condensateurs considérés. $C_{eq} = (C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n)$

Association en série

Lorsque deux condensateurs sont en série, donc soumis au même courant.

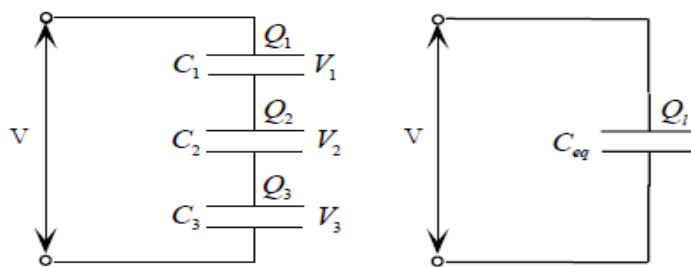


Figure 5 : Condensateur en série

Il en résulte que la charge stockée par chacun d'eux est identique.

$$Q = Q_1 = Q_2 = C_1 V = C_2 V = C_{eq} V$$

$$U = \frac{Q}{C_{eq}} = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\text{D'où } \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

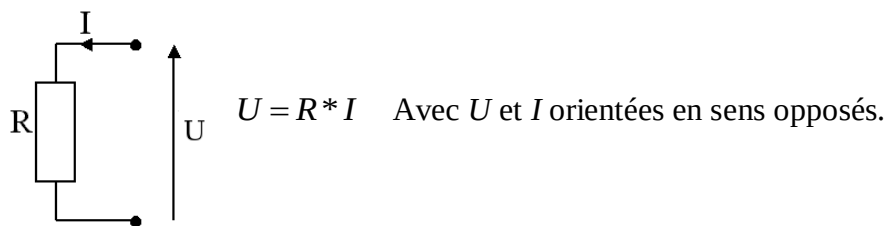
Ce raisonnement étant généralisée pour n condensateurs, on en déduit que le condensateur équivalent a pour inverse de sa capacité la somme des inverses des capacités des n condensateurs considérés. $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}$

I-3 La loi d'ohm

La loi d'Ohm est une loi physique qui lie l'intensité du courant électrique traversant un dipôle électrique à la tension à ses bornes (elle permet de déterminer la valeur d'une résistance). La loi d'Ohm a été ainsi nommée en référence au physicien allemand Georg Simon Ohm.

d) Lois d'ohm en continue

La différence de potentiel ou tension U (en volts) aux bornes d'une résistance R (en ohms) est proportionnelle à l'intensité du courant électrique I (en ampères) qui la traverse.



e) La loi d'ohm en alternatif

La loi précédente se généralise au cas des courants sinusoïdaux en utilisant les notations complexes. On note $\underline{U}$ et $\underline{I}$ la tension et le courant complexes. La loi d'Ohm s'écrit alors :

$\underline{U} = \underline{Z} * \underline{I}$ Avec $\underline{Z}$: impédance complexe du dipôle considéré, qui peut être constitué de dipôles linéaires (résistances, condensateurs et inductances).

f) La loi de joule

Les pertes par effet joule se caractérisent par l'échauffement du composant. En d'autre terme c'est l'énergie perdu sous forme de chaleur. Son unité est le joule (j). Elle est exprimée par :

$$w = R * I^2 * t$$

La puissance sera donc $P_j = R * I^2$. L'unité est le watt (w)

I-5 La résistance

C'est un dipôle passif. Il fonctionne en courant continu et en courant alternatif. Le déphasage entre le courant et la tension est toujours nul. Pour retrouver la valeur de la résistance, il faut

connaitre que : $R = \frac{\rho * l}{S}$

c) En série

Les résistances s'ajoutent. Elles sont dites en série lorsqu'elles sont parcourues par le même courant.

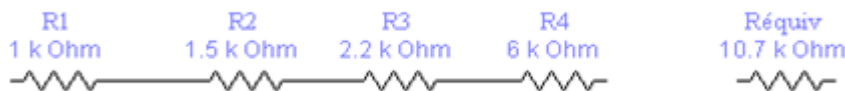


Figure 7 : Résistances en série

$$V = V_{R1} + V_{R2} + V_{R3} + V_{R4}$$

On a d'autre part le courant commun I qui traverse les quatre résistances.

$$\begin{cases} V_{R1} = R1 * I \\ V_{R2} = R2 * I \\ V_{R3} = R3 * I \\ V_{R4} = R4 * I \end{cases} \text{ Ce qui implique } V = R1 * I + R2 * I + R3 * I + R4 * I$$

$$V = (R1 + R2 + R3 + R4) * I = Réquiv * I \quad \text{Donc } Réquiv = R1 + R2 + R3 + R4$$

d) En parallèle

Les conductances s'ajoutent.

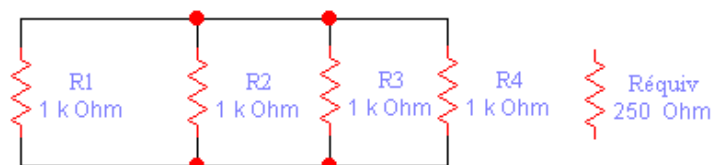


Figure 8 : Résistances en parallèles

$$V = Réquiv * I = \frac{I}{\frac{1}{Réquiv}} = \frac{I}{G}$$

$$V = R1 * I1 = R2 * I2 = R3 * I3 = R4 * I4$$

On pourra écrire aussi l'expression sous :

$$V = \frac{I1}{\frac{1}{R1}} = \frac{I2}{\frac{1}{R2}} = \frac{I3}{\frac{1}{R3}} = \frac{I4}{\frac{1}{R4}} = \frac{I1}{G1} = \frac{I2}{G2} = \frac{I3}{G3} = \frac{I4}{G4} = \frac{I1 + I2 + I3 + I4}{G1 + G2 + G3 + G4} = \frac{I}{G1 + G2 + G3 + G4}$$

$$\text{Or on a : } V = \frac{I}{\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3} + \frac{1}{R4}} \Rightarrow \frac{1}{R_{\text{équiv}}} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3} + \frac{1}{R4}$$

En mettant une résistance en dérivation sur une tension de circuit, on diminue la résistance totale du circuit. La résistance équivalente à plusieurs résistances en parallèle est toujours plus petite que la plus petite d'entre elles.

II LOI DE KIRCHHOFF

II-1 Introduction

Les **lois de Kirchhoff** sont des propriétés physiques qui s'appliquent sur les circuits électriques. Ces lois portent le nom du physicien allemand *Gustav Kirchhoff* qui les a établies en 1845. Les deux lois de Kirchhoff sont :

- La **loi des nœuds**
- La **loi des mailles**

II-2 Loi des nœuds

Cette loi importante dans le domaine électrique stipule que « *la somme algébrique des intensités des courants qui entrent par un nœud est égale à la somme algébrique des intensités des courants qui en sortent* ». Cela signifie que si dans un nœud la somme des intensités électrique entrantes est égale par exemple à 20 Ampères, alors la somme des intensités électrique sortantes sera obligatoirement égale à 20 Ampères également.

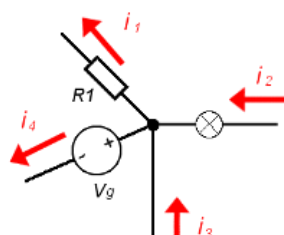


Figure 9 : Schéma illustrant la loi des nœuds

Le schéma de la figure 9 représente un modèle électrique qui illustre à merveille la loi des nœuds. Le sens des courants de ce schéma est donné au hasard. On y retrouve 4 courants :

- **i₁** qui sort du nœud
- **i₂** qui entre dans le nœud

- i_3 qui entre dans le nœud
- i_4 qui sort du nœud

A l'aide de la loi citée plus haut, il est possible d'en déduire la formule suivante :

$$i_1 + i_4 = i_2 + i_3$$

Exercice

Imaginons que l'on conserve le montage précédent et que l'on connaît les valeurs des intensités i_2 , i_3 et i_4 . $i_2 = 26\text{mA}$, $i_3 = 5\text{mA}$ et $i_4 = 500\mu\text{A}$

Quelle est l'intensité de i_1 ?

Pour calculer i_1 , il est possible de transformer la formule initiale en la suivante :

$$i_1 = -(i_4) + i_2 + i_3$$

Puis il est possible de remplacer par les valeurs :

$$i_1 = -(12\text{mA}) + 500\mu\text{A} + 5\text{mA}$$

Pour ne pas se tromper dans les unités, toutes les valeurs peuvent être indiquées en Ampère :

$$i_1 = -(12 * 10^{-3}) + 500 * 10^{-6} + 5 * 10^{-3}$$

Il est plus facile de réaliser l'équation en transformant $500\mu\text{A}$ en 0.5mA :

$$i_1 = -(12 * 10^{-3}) + 0.5 * 10^{-3} + 5 * 10^{-3}$$

La somme est donc égale à :

$$i_1 = -6.5 * 10^{-3}$$

Pour conclure, il est donc possible de dire que $i_1 = -6.5\text{mA}$. Cela signifie que le courant i_1 sort du nœud avec une intensité de -6.5mA , mais cela signifie aussi qu'il entre dans le nœud avec une intensité positive de 6.5mA . Le sens dans lequel est dessinée l'intensité sur le schéma est donc qu'une affaire d'interprétation.

II-3 Loi des mailles

La **loi des mailles** est la deuxième loi de Kirchhoff. Cette loi n'est pas plus compliquée mais demande de la rigueur pour éviter les erreurs d'étourderies. Cette loi stipule que « *dans une maille d'un réseau électrique, la somme des tensions le long de cette maille est toujours nulle* ». En d'autres termes, si on fait le tour d'une maille et que l'on additionne toutes les tensions de celle-ci (en faisant attention au sens), la somme sera égale à zéro.

Le schéma de la figure 10 représente un circuit électrique fermé. Les différences de potentiel, aussi appelé tension, sont aussi représentés. La boucle choisie représente le sens dans lequel seront listées les tensions.

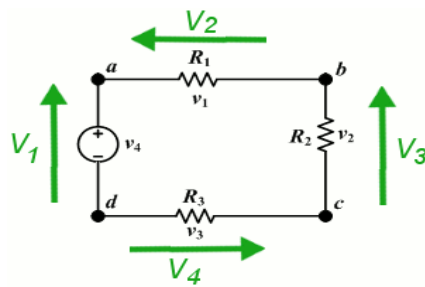


Figure 10 : Schéma illustrant la loi des mailles

En suivant la boucle choisie et en faisant attention au sens, les tensions peuvent être listées comme ceci :

$$+V_1 + -V_2 + -V_3 + -V_4 = 0$$

L'équation précédente utilise un signe positif lorsque la différence de potentiel est dans le même sens que la boucle choisie. De même, les tensions qui sont dans le sens opposés à la boucle sont ajoutées avec un signe négatif. De ce fait, la formule peut aussi être présentée comme ceci:

$$V_1 - V_2 - V_3 - V_4 = 0$$

Exercice

Imaginons que l'on souhaite connaître la tension de V_3 en connaissant les tensions V_1 , V_2 et V_4 . $V_1 = 7V$, $V_2 = 4V$ et $V_4 = 1.5V$

Pour effectuer le calcul permettant de connaître V_3 , il est possible de reprendre la formule énoncée ci-dessus et de la transformer pour isoler V_3 :

$$V_3 = V_1 - V_2 - V_4$$

Puis il est possible de remplacer par les valeurs respectives :

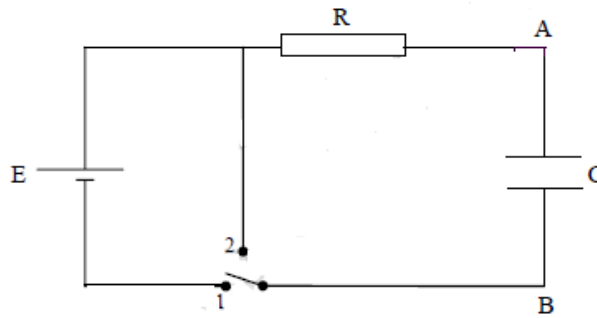
$$V_3 = 7V - 4V - 1.5V = 1.5V$$

Et voilà, dans cet exemple la valeur de la tension V_3 a été déterminée à 1.5V.

III CHARGE ET DECHARGE D'UN CONDENSATEUR

III-1 Montage

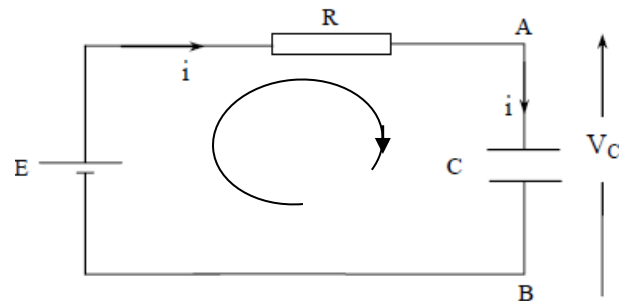
C'est un circuit contenant une alimentation, des composants passifs (résistance et condensateur) et un interrupteur pour commander l'ouverture et la fermeture du circuit et par conséquent la charge et la décharge du condensateur.



III-2 Charge d'un condensateur

Initialement, on suppose que la différence de potentiel (d.d.p) aux bornes du condensateur est nulle (le condensateur est complètement déchargé).

- A $t=0$, on ferme l'interrupteur (position 1)



Appliquons au circuit la loi de maille à un instant quelconque :

$$E = R \cdot i + V_c$$

$$\text{Avec : } i = \frac{dq}{dt} \quad \text{et} \quad V_c = \frac{Q}{C}$$

Donc

$$E = R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{Q}{C}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à variables séparées qu'on peut résoudre en tenant compte des conditions initiales :

$$t=0 \quad q=0$$

$$t=\infty \quad q=Q_0=C \cdot E$$

$$E = R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{Q}{C} \Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{1}{R} \left(E - \frac{Q}{C} \right) \Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{C \cdot E - Q}{RC}$$

$$\text{Il vient } \frac{dq}{CE - Q} = \frac{dt}{RC} \Rightarrow \frac{dq}{Q - CE} = - \frac{dt}{RC}$$

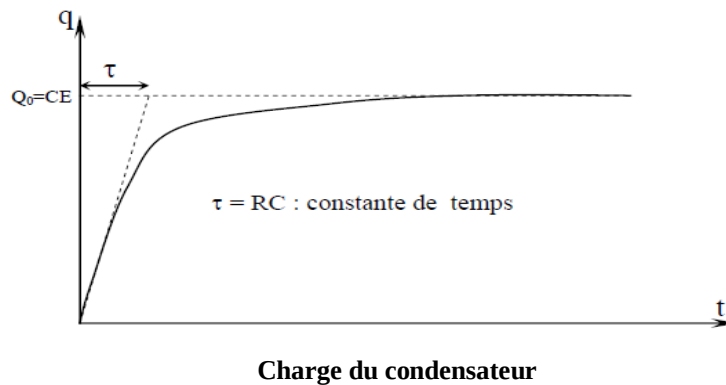
$$\text{Donc} \quad \ln(Q - CE) = - \frac{t}{RC} + k$$

Pour déterminer la constante k , on procède de la façon suivante :

A $t=0$, $Q=0$

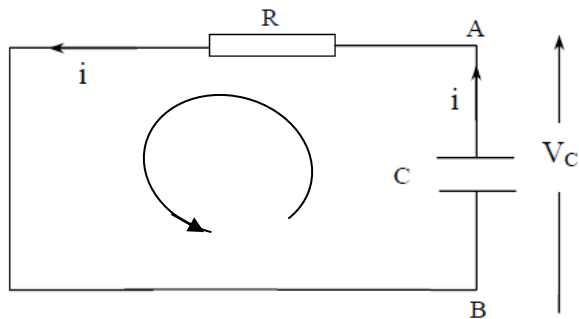
$$\ln(-CE) = k \Rightarrow \ln(Q - CE) = -\frac{t}{RC} + \ln(-CE)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{Q - CE}{-CE}\right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{CE - Q}{CE} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow Q = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



III-3 Décharge d'un condensateur

On ouvre l'interrupteur (position 2)



On considère qu'à $t \rightarrow \infty$, $V_C = V_0 = E$ et $Q_0 = CV_0 = CE$

D'après la loi de maille

$$R \cdot i + V_C = 0$$

$$\Rightarrow R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{dq}{Q} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow \ln Q = -\frac{t}{RC} + k'$$

Il vient

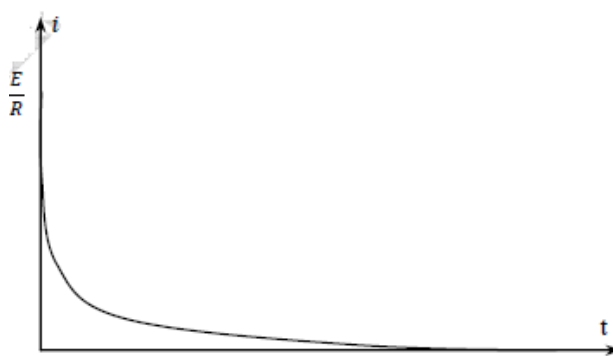
$$Q = k' e^{-\frac{t}{RC}} \quad k': \text{constante}$$

A $t \rightarrow \infty$, $Q = Q_0 = CV_0 = CE$ et $k' = CV_0$

On obtient donc

$$Q = CV_0 e^{-\frac{t}{RC}} = CE e^{-\frac{t}{RC}}$$

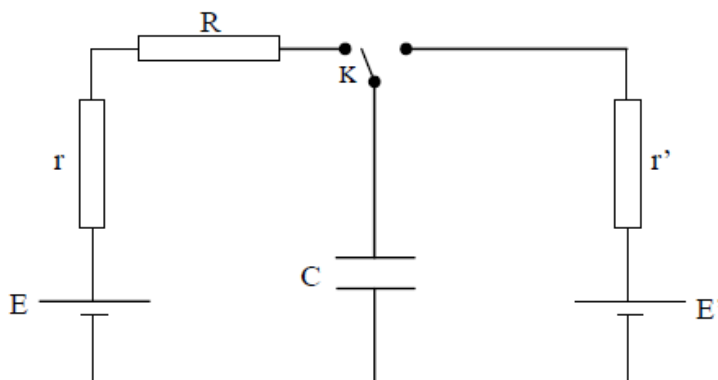
$$\text{D'où } i = -\frac{dq}{dt} = \frac{CV_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow i = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$



Décharge d'un condensateur

Exercice

Soit le circuit la figure ci-dessous. L'interrupteur K est initialement en position 0 et le condensateur C initialement déchargé. On donne $E=6\text{ V}$, $E'=3\text{ V}$, $R=r=r'=500\ \Omega$ et $C=1\mu\text{F}$.



1. A l'instant $t=0$, on met l'interrupteur K en position 1.
 - a. Quelle est l'équation différentielle donnant la ddp V_C aux bornes du condensateur.
 - b. Quelle est la constante de temps τ du circuit ?

- c. Donner l'expression de V_C en fonction du temps.
 - d. Calculer V_C pour $t=0, \tau, 2\tau, 3\tau, 4\tau$ et 5τ .
 - e. Représenter l'allure de la tension $V_C(t)$.
2. En réalité, à l'instant $t_1=2\tau$, on met l'interrupteur K en position 2.
- a. Quelle est l'équation différentielle donnant la d.d.p V_C aux bornes du condensateur ?
 - b. Quelle est la nouvelle constante de temps τ' du circuit ?
 - c. Donner l'expression de V_C en fonction du temps.
 - d. Calculer V_C pour $(t-t_1)=0, \tau', 2\tau', 3\tau', 4\tau'$ et $5\tau'$.
 - e. Représenter la variation de V_C au cours du temps sur le même graphe qu'en 1-e.
 - f. Dans quel sens circule le courant ?

CHAPITRE II : COURANT ALTERNATIF

I RAPPEL

I-1 Rappels mathématiques sur les nombres complexes

Un nombre complexe noté Z peut s'écrire sous la forme : $Z = a + j b$

a est la partie réelle du nombre complexe b est la partie imaginaire du nombre complexe

Remarque : Cette écriture de Z est appelée l'écriture cartésienne. Il en existe une autre, appelée écriture trigonométrique, notée Z . $Z = |Z| * (\cos \phi + j \sin \phi) = |Z| e^{j\phi}$

c) Module et argument

Module. Le module de Z est le nombre Z définit par : $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

En électronique, le module Z est la valeur maximale du signal sinusoïdal.

Argument. L'argument de Z est le nombre ϕ définit par : $\text{Arg } Z = \phi, \quad \tan \phi = \frac{b}{a}$

En électronique, $\text{Arg } Z$ est la phase du signal sinusoïdal.

d) Propriétés des opérations entre nombres complexes

L'addition.

Soient $Z_1 = a_1 + j b_1$ et $Z_2 = a_2 + j b_2$, alors

$$Z = Z_1 + Z_2 = (a_1 + j b_1) + (a_2 + j b_2) = (a_1 + a_2) + j (b_1 + b_2)$$

Pour additionner deux nombres complexes, on additionne les parties réelles d'une part et on additionne les parties imaginaires d'autre part.

La multiplication.

- On utilise les propriétés du développement d'un produit par rapport à une somme ou une différence établie dans IR. (à éviter en électronique)
- On utilise les propriétés du module et de l'argument suivantes :

$$|Z_1 \times Z_2| = |Z_1| \times |Z_2|$$

$$\text{Arg} (Z_1 \times Z_2) = \text{Arg} (Z_1) + \text{Arg} (Z_2)$$

La division.

On utilise les propriétés du module et de l'argument d'un nombre complexe

$$|Z_1 / Z_2| = |Z_1| / |Z_2|$$

$$\text{Arg} (Z1/Z2) = \text{Arg} (Z1) - \text{Arg} (Z2)$$

I-2 Magnétismes

Le magnétisme représente un ensemble de phénomènes physiques dans lesquels les objets exercent des Forces attractives ou répulsives sur d'autres matériaux. Tous les matériaux sont influencés, de manière plus ou moins complexe, par la présence d'un champ magnétique.

Les aimants permanents possèdent des moments magnétiques permanents à l'origine du ferromagnétisme. Cependant, la plupart des matériaux ne possèdent pas de moments permanents. Parmi ces derniers, certains sont attirés par la présence d'un champ magnétique (Paramagnétisme), d'autres sont au contraire repoussés par celui-ci (diamagnétisme) et d'autres encore ont une relation beaucoup plus complexe avec un champ magnétique appliqué (antiferromagnétisme).

I-3 Induction magnétique

L'induction magnétique, aussi appelée induction électromagnétique, est un phénomène physique conduisant à l'apparition d'une force électromotrice dans un conducteur électrique soumis à un flux de champ magnétique variable. Cette force électromotrice peut engendrer un courant électrique dans le conducteur. Ce phénomène est notamment utilisé dans les transformateurs électriques, les bobines, ou encore les plaques à induction grâce aux courants de Foucault.

I-4 Flux magnétique

C'est un courant induit crée par la présence du champ magnétique dans un bobinage. Il est noté Φ . Le flux magnétique circulant dans le noyau (pour un matériau magnétique linéaire)

est égal à $\Phi = \int_s \vec{B} d\vec{s} = BA = \mu H A$. Cette relation peut être exprimée sous la forme : $\Phi = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{R}}$

On appelle $\mathfrak{R}$ la réluctance du circuit magnétique. La réluctance est une quantité qui caractérise la "résistance" du circuit magnétique au passage du flux. On peut même l'assimiler à la loi d'Ohm pour les circuits électriques.

La réluctance d'un circuit de surface A, de longueur moyenne l_c et perméabilité μ s'écrit de la

façon suivante: $\mathfrak{R} = \frac{l_c}{\mu A}$ La réluctance est exprimée en At/Wb.

Donc, comme équivalence aux circuits électriques :

Circuit électrique	Circuit magnétique
Tension V	Force magnétomotrice
Résistance	Réluctance
Courant I	Flux ϕ

Tableau 1 : Comparaison entre circuit électrique et circuit magnétique

I-5 Self inductance

La self-induction est un coefficient propre à la bobine et il est symbolisé par la lettre L . Il s'exprime de la manière suivante : $L = \frac{\phi}{I}$. Son unité est le Henry.

I-6 Loi de Faraday

La loi de Faraday, est la suivante : un circuit soumis à un flux magnétique variable ϕ (issu d'un champ magnétique variable B) subit une force électromotrice e (en volts, en orientant e selon une convention générateur) telle que : $e = -\frac{d\phi}{dt}$

La variation temporelle du flux magnétique à travers un circuit fermé y engendre une force électromotrice f .é.m induite

II COURANT ALTERNATIF

II-1 Définition

Un courant alternatif est un courant bidirectionnel. Il peut être périodique ou non périodique. Généralement, il se compose d'une enveloppe positive et d'une enveloppe négative de même amplitude. Il se répète pendant chaque période.

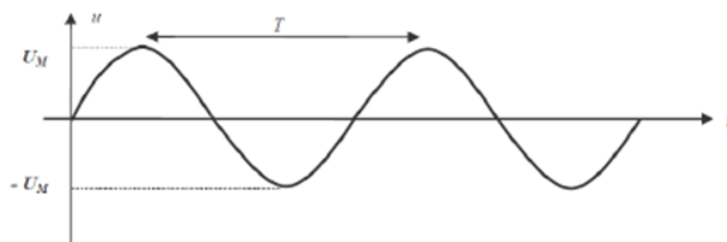


Figure 1 : Allure d'un signal périodique

II-2 Période d'un signal

Chaque signal est caractérisé par sa valeur maximale et sa période. Cette dernière est l'inverse de la fréquence. Elle est notée par $T=1/f$. Son unité est la seconde. On pourra aussi la calculer en fonction de la pulsation ω qui est égale à $2\pi \cdot f$ (radian par seconde).

II-3 Valeur moyenne et valeur efficace de la tension :

c) Valeur moyenne ou Umoy

La formule : $U_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt$

Elle correspond à la moyenne des valeurs prises par la tension sur l'intervalle de temps correspondant à une période T . La valeur moyenne est mesurée avec un voltmètre en position « continu » (DC). Cette valeur est égale à $U_{moy} = \frac{2 U_{max}}{\pi}$

d) Valeur efficace Ueff ou simplement U

La formule : $(U_{eff})^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (U(t))^2 dt$

Un courant alternatif circulant dans un conducteur dissipe de la chaleur. Le courant qui dissiperait cette même quantité d'énergie pendant le même temps correspond à la tension efficace. La tension efficace est mesurée avec un voltmètre en position « alternatif » (AC).

Pour une sinusoïde : $U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$. Le tableau 2 donne quelques formes de signaux accompagnées par leur valeur efficace correspondante. Il existe d'autres formes du signal alternatif périodique.

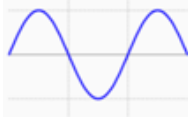
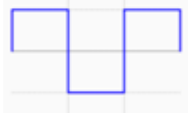
Signal (régime établi)	Forme d'onde	Valeur efficace du courant
Sinusoidal		$I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$
Triangulaire		$I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{3}}$
Carré		$I_{eff} = I_{max}$

Tableau 2 : Présentation de quelques formes d'un signal périodique alternatif

III NOTATION COMPLEXE

A une différence de potentiel sinusoïdale

$u(t) = U_{max} \times \sin(2 \pi f t + \varphi)$ est associée le nombre complexe U ou encore

$u(t) = U_{max} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ avec $\omega = 2 \pi f$

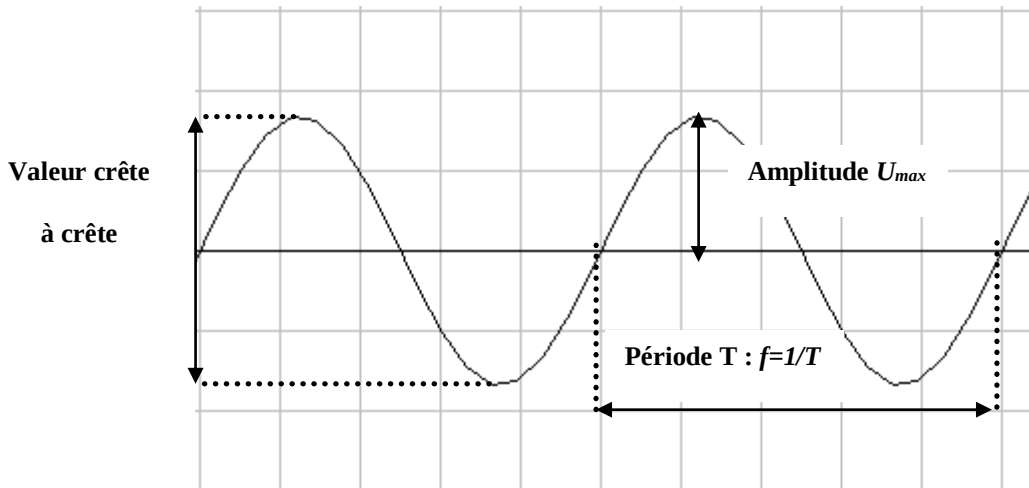


Figure 2 : Signal sinusoïdal périodique

A une intensité de courant sinusoïdale

$i(t) = I_{max} \times \sin(2 \pi f t + \varphi)$ est associée le nombre complexe I

IV PHASE ET DEPHASAGE

La représentation cartésienne utilise des fonctions sinusoïdales du temps :

$i(t) = I_{max} \times \sin(2 \pi f t + \varphi_i)$ et $u(t) = U_{max} \times \sin(2 \pi f t + \varphi_u)$

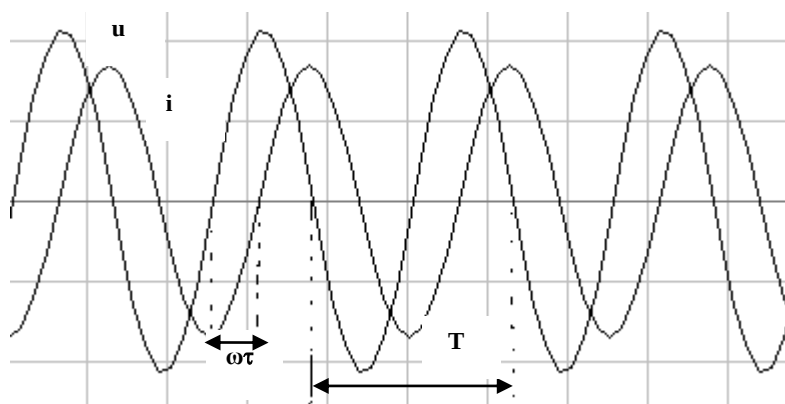


Figure 3 : Représentation cartésienne du courant et de la tension

Le déphasage entre la tension u et le courant i est la différence $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ entre les phases initiales de u et de i :

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

Si $\varphi = \varphi_u - \varphi_i > 0$, la tension u est en avance sur l'intensité i .

Si $\varphi = \varphi_u - \varphi_i < 0$, la tension u est en retard sur l'intensité i .

Le déphasage se déduit du décalage horaire, à l'aide de la relation :

$$|\varphi| = \frac{2\pi \cdot \tau}{T}$$

Nous pouvons choisir l'une des phases initiales nulle :

Si $\varphi_u = 0$: $i(t) = I_{max} \times \sin(w t - \varphi_i)$ et $u(t) = U_{max} \times \sin(w t)$

Avec : $\varphi = \varphi_i$ = déphasage de $i(t)$ par rapport à $u(t)$.

On pourra donner un autre exemple et voir sa représentation vectorielle.

- $u = U_{max} \times \sin(w t)$ u est choisie comme origine des phases.
- $I_1 = I_{1max} \times \sin(w t - \varphi_1)$ i_1 est déphasé de φ_1 en arrière.
- $I_2 = I_{2max} \times \sin(w t - \varphi_2)$ i_2 est déphasé de φ_2 en avance.

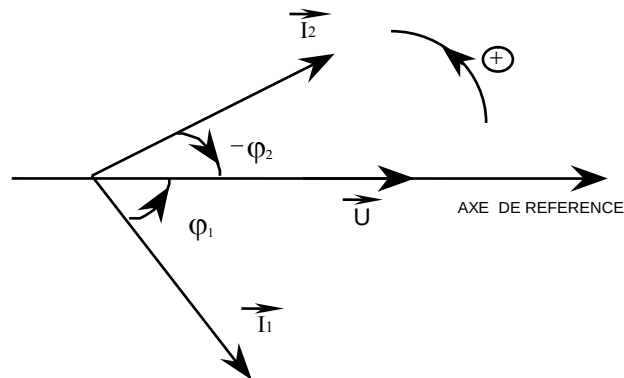
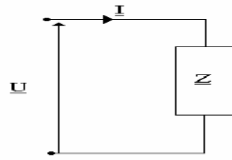


Figure 4 : Représentation Vectorielle (Fresnel)

IV NOTION D'IMPEDANCE

Pour un dipôle D , parcouru par le courant i et aux bornes duquel on mesure la tension u , l'impédance complexe Z est définie comme étant le rapport de la représentation complexe de u

par celle de i : $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$



L'inverse de l'impédance est appelée *admittance*, et est souvent notée Y . $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$

Dans le cas général, un dipôle quelconque n'a pas une impédance "purement" réelle ou imaginaire. De plus, a priori, cette impédance dépend de la fréquence, comme on peut le remarquer par exemple pour une bobine ou un condensateur. Une impédance peut également avoir une partie imaginaire négative (comme un condensateur, par exemple) et on dit alors qu'elle est de type *capacitif*, ou une partie imaginaire positive (par exemple une bobine) : elle est alors de type *inductif*. En revanche, pour des composants passifs, la partie réelle, qui correspond à une résistance, est dite résistive et est toujours positive.

IV-1 Impédance complexe d'un dipôle passif

d) Le dipôle résistif

Déphasage de i par rapport à u	0 i est en phase avec u
Comportement en régime continu	$U = R * I$
Comportement en régime sinusoïdal	$u = R * i$

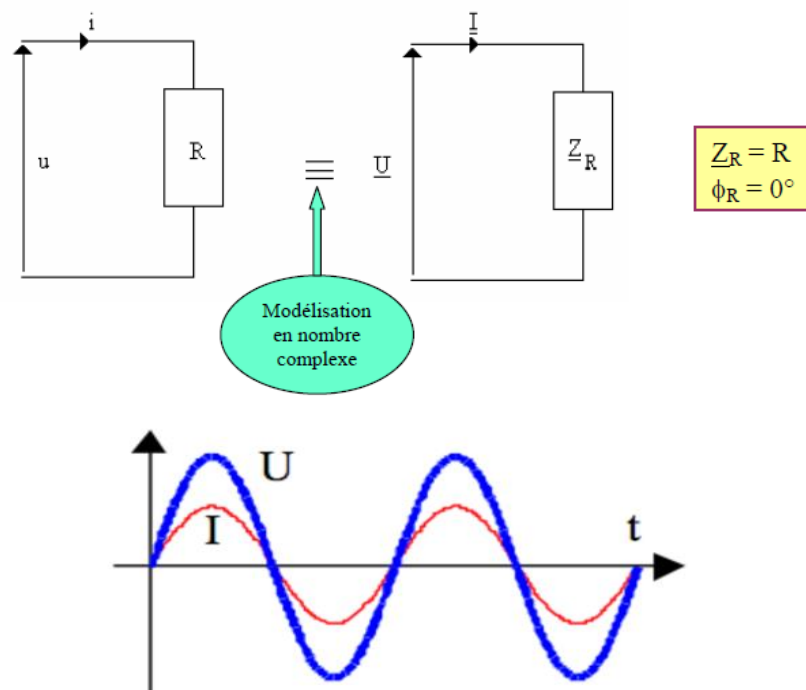


Figure 5 : Relation entre phase pour une résistance pure

e) Le dipôle capacitif

Déphasage de i par rapport à u ou l'inverse -90° u est en retard par rapport à i

Comportement en régime sinusoïdal $u = \frac{i}{jC\omega}$ $i = \frac{Cdu}{dt}$

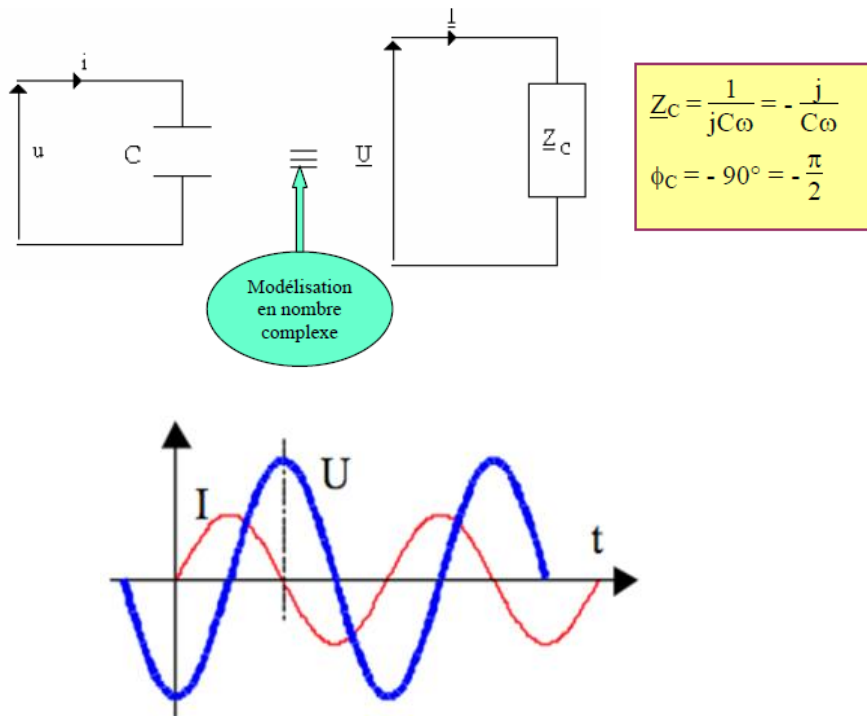
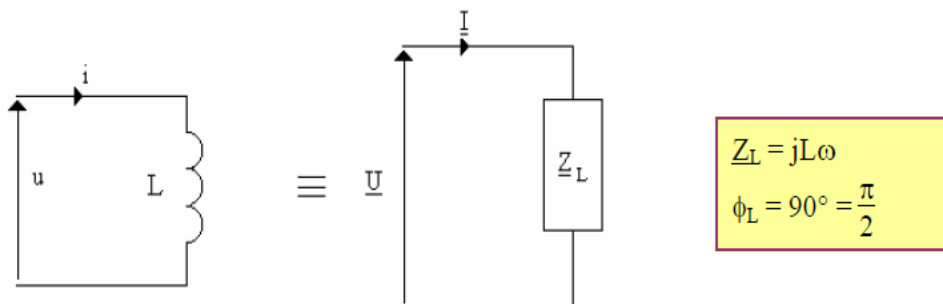


Figure 6 : Relation entre phase pour un condensateur pur

f) Le dipôle inductif

Déphasage de i par rapport à u ou l'inverse 90° u est en avance par rapport à i

Comportement en régime sinusoïdal $u = jL\omega i$ et $u = \frac{L di}{dt}$



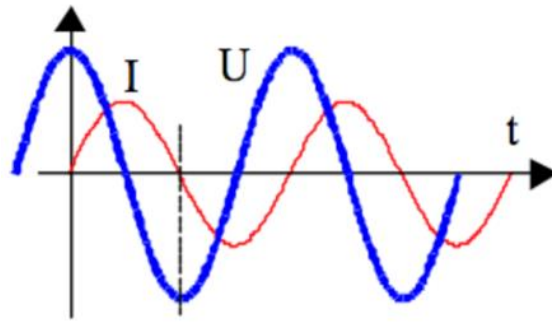
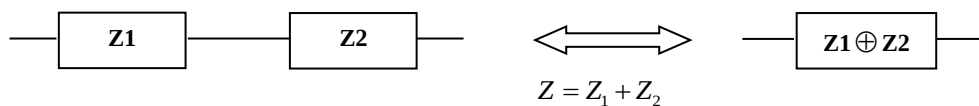


Figure 7 : Relation entre phase pour une bobine pure

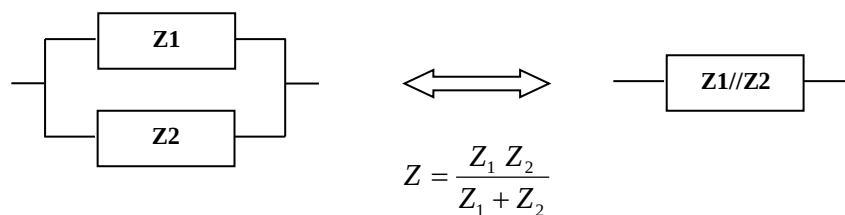
V ASSOCIATION D'IMPEDANCES

Il est facile de vérifier que :

- L'impédance équivalente de deux impédances mises en série est égale à la somme des deux impédances:



- L'impédance équivalente de deux impédances mises en parallèle est égale à l'inverse de la somme des inverses des deux impédances (autrement dit, les admittances s'ajoutent):



VI RESONANCE SERIE ET PARALLELE

VI-1 Définition de la résonance

La résonance est un phénomène électrique qui se produit dans un circuit électrique à une fréquence appelée fréquence de résonance dont les parties imaginaires des impédance et admittance des éléments du circuit s'annulent. Les circuits résonants comportent des retentissements et peuvent générer de plus hautes tensions et courants que ceux qu'ils reçoivent, ce qui les rend utiles pour la transmission sans fil. Dans un circuit composé de condensateurs et de bobines, le champ magnétique dans une bobine induit un courant

électrique dans les enroulements de cette bobine pour charger un condensateur. Lorsqu'il se décharge, le condensateur produit un courant électrique qui renforce le champ magnétique dans la bobine. Ce processus est répété continuellement, de façon comparable au processus de balancement d'un pendule mécanique. Dans certains cas, la résonance a lieu lorsque les réactances de bobine et de condensateur sont de magnitudes égales, de sorte que l'énergie électrique oscille entre le champ magnétique de la bobine et le champ électrique du condensateur.

VI-2 Résonance série

e) Montage

La résonance d'intensité est représentée par un circuit RLC série. Lorsque la valeur de la réactance inductive est égale à celle de la réactance capacitive ($X_L = X_C$), le circuit n'est ni surtout inductif ni surtout capacitif. Il s'agit là du phénomène de résonance.

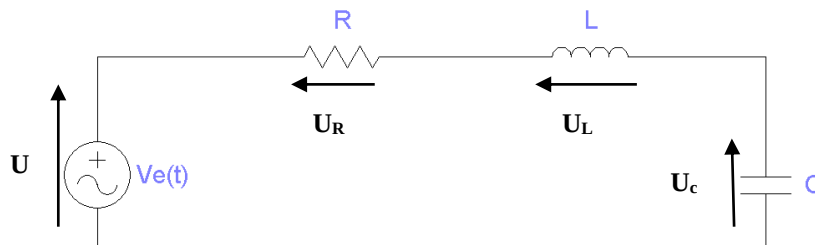


Figure 7 : Circuit RLC série

f) Principe de la résonance

Un circuit RLC en série est dit en résonance lorsque les effets des réactances s'annulent ($X_L = X_C$). L'impédance du circuit est alors à son minimum.

Le circuit RLC série présente le module de l'impédance $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

A la résonance, $X_L = X_C$ alors $Z = R$ (Impédance purement résistive)

Etant donné que le courant est partout le même dans un circuit en série et comme les réactances sont égales, les tensions aux bornes des composants L et C sont égales et s'annulent.

Par conséquent, la tension appliquée au circuit est égale à la tension aux bornes de la résistance. La figure 8 n'est autre que la représentation de Fresnel qui montre le déphasage entre les tensions et le courant dans le circuit RLC en résonance.

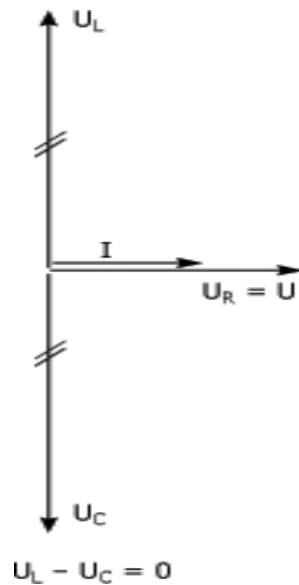


Figure 8 : Représentation de Fresnel

Lorsque $X_L = X_C$, le courant du circuit est en phase avec la tension appliquée au circuit. Il peut être calculé par l'une des formules suivantes :

$$\begin{cases} I = \frac{U}{Z} \\ I = \frac{U}{R} \quad (Z = R) \end{cases}$$

Où :

I : courant du circuit en ampères (A)

U : tension appliquée au circuit en volts (V)

Z : impédance du circuit en ohms

R : résistance du circuit en ohms

Puisque l'impédance d'un circuit RLC en résonance est à son minimum, le courant du circuit est à son maximum. De ce fait, la tension aux bornes du condensateur et celle aux bornes de la bobine sont également à leur maximum.

g) Courbes de résonance

La courbe montre bien que lors de la résonance:

- L'impédance d'un circuit RLC en série est à son minimum.
- Le courant du circuit est à son maximum.

Alors, quelles sont les valeurs de l'impédance et du courant à proximité de la résonance ? Cette question trouvera sa réponse dans les courbes de résonance présentées dans la figure 9.

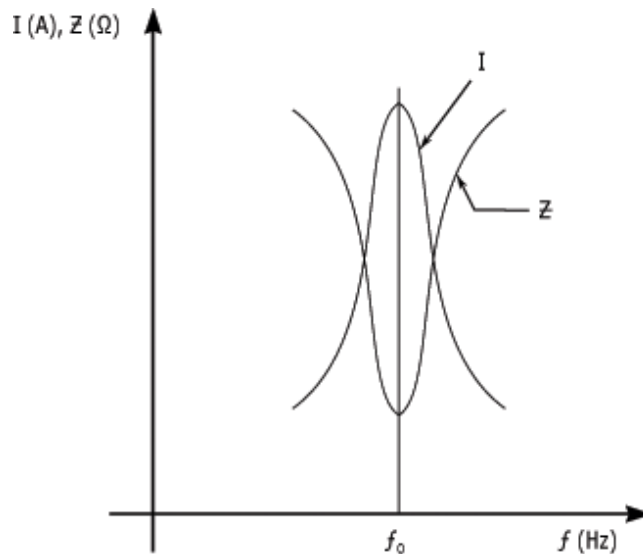


Figure 9 : Courbe de résonance

La figure 9 représente respectivement le courant et l'impédance d'un circuit RLC en série en fonction de la fréquence. On peut voir qu'à la fréquence de résonance, l'impédance est à sa valeur minimale. On remarque également qu'elle augmente symétriquement par rapport à la fréquence de résonance (f_0) au fur et à mesure que la fréquence du circuit s'éloigne de sa valeur de résonance (f_0). Par contre, à la fréquence de résonance, le courant est à son maximum et sa valeur diminue graduellement de façon symétrique au voisinage de la fréquence de résonance. Il est également possible d'obtenir les courbes de résonance pour les tensions U_R , U_L et U_C . Ces courbes, en effet, seront semblables à celles du courant, puisque ces tensions sont toutes des produits du courant.

h) Coefficient de surtension

Un circuit RLC en série peut être caractérisé par un facteur de qualité " Q_0 ". Ce facteur est défini par le rapport entre la réactance inductive ou capacitive et la résistance, comme le montrent les formules suivantes :

$$\text{i) } Q_0 = \frac{X_L}{R} = \frac{X_C}{R}$$

Il est important de dire que la fréquence de résonance d'un circuit RLC en série est déterminée

par le produit de l'inductance et de la capacité (LC) via l'équation : $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

VI-3 Résonance parallèle

c) Montage

Tout comme le circuit RLC en série, le circuit RLC en parallèle est aussi en résonance lorsque ses réactances s'annulent ($X_L = X_C$). Toutefois, à cause de la configuration de ce circuit, la résonance d'un circuit RLC en parallèle ne produit pas les mêmes effets que celle d'un circuit RLC en série.

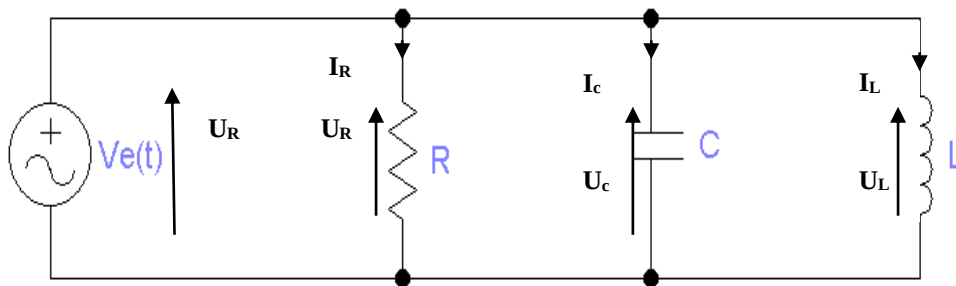


Figure 9 : Circuit RLC parallèle

d) Principe de la résonance

La résonance d'un circuit RLC en parallèle se produit lorsque les effets de chacune des réactances s'annulent ($X_L = X_C$). L'impédance du circuit est alors purement résistive et est égale à la résistance. $Z = R$

Pour ce qui est des courants, lorsque $X_L = X_C$, le courant parcouru par la bobine doit, pour la même tension appliquée aux bornes de chacun des composants, être égal à celui traversant le condensateur ($I_L = I_C$). Par ailleurs, à cause du déphasage entre la tension et le courant dans chacun de ces composants, les courants I_L et I_C s'opposent et s'annulent. Ainsi le courant du circuit est égal au courant de la résistance et est en phase avec la tension appliquée. Ce courant peut être calculé grâce à l'une des formules suivantes :

$$\begin{cases} I = \frac{U}{Z} \\ I = \frac{U}{R} \quad (Z = R) \end{cases}$$

La figure 10 représente la relation de phase entre les courants et la tension d'un circuit RLC en parallèle lors de la résonance :

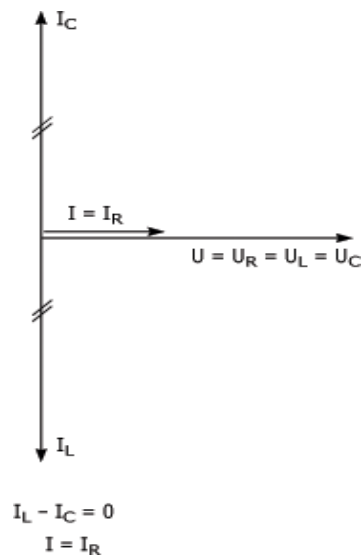
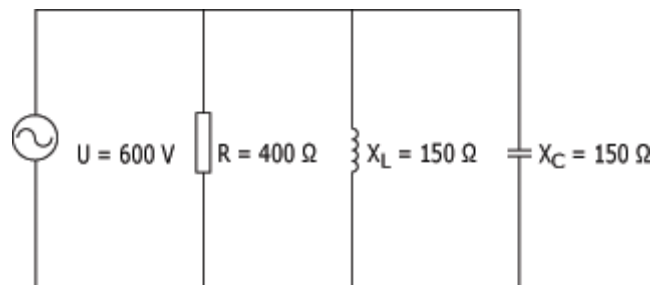


Figure 10 : Représentation de Fresnel

Exercice

1. Pour le circuit en résonance ci-dessous.



Calculez :

- a) Le courant dans la bobine.
- b) Le courant dans le condensateur.
- c) Le courant dans la résistance.
- d) Le courant total.

2. Tracez le diagramme vectoriel de la tension et des courants de ce circuit.

Réponse

1. Calculs des courants

a) Calcul du courant dans la bobine :

$$I_L = \frac{U}{X_L}$$

Où : $U = 600 \text{ V}$; $X_L = 150 \text{ Ohms}$

Application numérique

$$I_L = \frac{600}{150} = 4A$$

b) Calcul du courant dans le condensateur :

$$I_C = \frac{U}{X_C}$$

Où : $U = 600 \text{ V}$; $X_C = 150 \text{ Ohms}$

Application numérique

$$I_C = \frac{600}{150} = 4A$$

c) Calcul du courant dans la résistance :

$$I_R = \frac{U}{R}$$

Où : $U = 600 \text{ V}$; $R = 400 \text{ Ohms}$

Application numérique

$$I_L = \frac{600}{400} = 1,5A$$

d) Calcul du courant total :

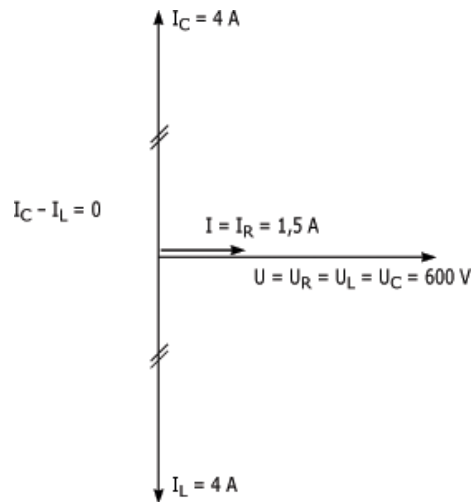
$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$$

Où : $I_R = 1,5 \text{ A}$; $I_C = 4 \text{ A}$; $I_L = 4 \text{ A}$

$$I = \sqrt{(1,5)^2 + (4 - 4)^2} = 1,5A$$

Le courant total du circuit est égal à 1,5 A, soit la même valeur que le courant dans la résistance.

2. Diagramme de Fresnel



Cet exemple vous montre que lors de la résonance, les courants dans les composants réactifs (I_L et I_C) peuvent être très élevés par rapport au courant total du circuit.

Ce phénomène est analogue à celui de la surtension lors de la résonance d'un circuit RLC en série. On le nomme le phénomène de surintensité.

CHAPITRE III : RESEAUX ELECTRIQUES

I DEFINITION

Un circuit électrique est un ensemble d'éléments conducteurs reliés entre eux.

Le circuit est composé :

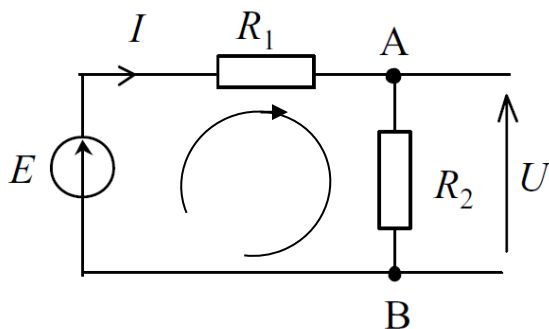
1. D'un générateur d'électricité (pile ou secteur) avec un pôle positif (+) et un pôle négatif (-).
2. De fils conducteurs de l'électricité reliés aux deux pôles du générateur et aux composants.
3. D'un récepteur (la charge qui peut être par exemple lampe ou moteur) relié au fils conducteurs.

Si dans le circuit un contact est rompu le circuit est dit **ouvert**. Si tous les éléments du circuit sont reliés sans rupture, le circuit est dit **fermé** et le courant électrique passe. Dans un circuit électrique le courant circule de la borne positive (+) vers la borne négative (-).

II LOI DE DIVISEUR DE COURANT ET DIVISEUR DE TENSION

II-1 Diviseur de tension

Le schéma d'un pont diviseur de tension est donné à la figure 1.



En appliquant directement le diviseur de tension, on aura l'expression de la tension aux bornes de la résistance R_2 :

$$U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} * E$$

Figure 1 : Disposition série des composants

Démonstration

Il s'agit d'une application directe de la mise en série de deux résistances d'après la loi de maille :

$$E = R_1 * I + R_2 * I$$

$$\text{D'où} \quad I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

On a aussi d'autre part la tension aux bornes d'une résistance est égale au produit de sa valeur par l'intensité du courant qui la traverse. Prenons la tension aux bornes de la résistance R_2 . $U = R_2 * I$, alors si on remplace le courant principal par son expression on trouvera :

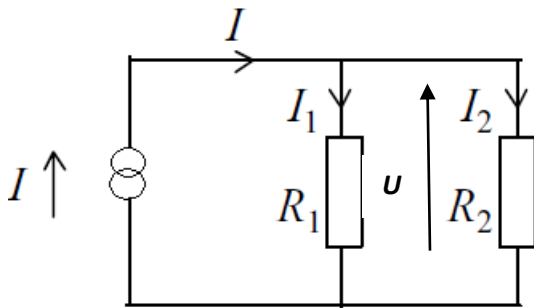
$$U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} * E$$

La tension ainsi obtenue est inférieure à la tension de la source principale E , d'où le nom donné à ce montage (diviseur de tension). Remarquons au passage, que d'une façon générale, la tension aux bornes d'une résistance placée dans un circuit série comportant n résistances, alimenté par une source de tension E est :

$$U_i = \frac{R_i}{R_1 + R_2 + R_3 + \dots R_n} * E$$

II-2 Diviseur de courant

Le schéma d'un pont diviseur de courant est donné à la figure 2



En appliquant directement le diviseur de courant, on aura l'expression du courant traversant par exemple la résistance R_2 :

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} * I \quad I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} * I$$

Figure 1 : Disposition parallèle des composants

Démonstration

Appelons « U » la différence de potentiel qui se trouve aux bornes des différents éléments en parallèle, nous obtenons d'après la loi d'ohm :

$$U = R_2 * I_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} * I$$

D'après l'égalité des deux expressions de la tension U , on pourra tirer l'expression du courant I_2

$$\text{D'où} \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} * I$$

Si, maintenant, nous divisons le numérateur et le dénominateur par le produit $R_1 R_2$, nous

obtenons la relation suivante :
$$I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} * I$$

Cette relation est maintenant sous une forme comparable à celle trouvée pour le diviseur de tension (paragraphe II-1). L'intensité obtenue est toujours inférieure au courant total I , d'où le nom donné à ce montage (diviseur de courant).

Remarque : D'une façon plus générale, le courant traversant une résistance R_i placée dans un circuit parallèle comportant n résistances, alimenté par une source idéale de courant I , est :

$$I_i = \frac{G_i}{G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n} * I$$

III NOTION DE SOURCES (LIEES ET INDEPENDANTES)

Une **source est dite commandée ou liée** lorsque sa grandeur caractéristique force électromotrice ou force contre électromotrice (f.e.m ou f.c.e.m) est en fonction d'une grandeur électrique (tension ou courant) du réseau. On ne peut pas éteindre une source liée. En effet, l'énergie qu'apporte une telle source n'est pas extérieure au réseau. Il s'agit d'énergie interne au réseau. En revanche, une **source est dite indépendante** lorsque sa grandeur caractéristique force électromotrice ou force contre électromotrice (f.e.m ou f.c.e.m) est indépendante de la grandeur électrique (tension ou courant) du réseau. On peut éteindre une source indépendante.

IV THEOREME DE SUPERPOSITION

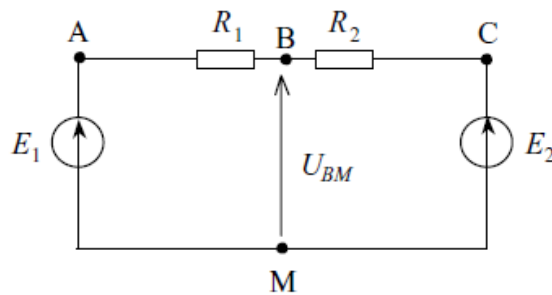
Ce théorème s'applique aux réseaux qui comportent plusieurs générateurs (deux sources et plus). Lorsque le circuit est trop compliqué, on le découpe en circuits simples. Si un circuit linéaire comprend plusieurs générateurs, le courant circulant dans une branche de ce circuit est la somme des courants qui seraient créés par chaque générateur pris isolément (les autres générateurs ayant été remplacés par leur impédance interne).

Soit un réseau linéaire comportant n sources indépendantes de la tension et du courant que nous pouvons noter : $S_1, S_2, \dots, S_n$, et une grandeur à calculer, comme par exemple I_K le courant dans la branche K. Appelons $I_{K1}, I_{K2}, \dots, I_{Kn}$, les valeurs de cette grandeur créée individuellement dans cette branche par chaque source agissant seule. Les autres sources étant passivées.

$$I_K = I_{K1} + I_{K2} + \dots + I_{Kn}$$

Remarque: Passiver une source revient à la remplacer par sa résistance interne. Autrement dit, ceci revient à court-circuiter les sources de tension et à ouvrir les sources de courant.

Application



Retrouver la tension U_{BM} en utilisant le théorème de superposition.

$$\text{Si } E_1 \neq 0 \quad E_2 = 0, \quad U_{BM} = U_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} * E_1$$

$$\text{Si } E_2 \neq 0 \quad E_1 = 0, \quad U_{BM} = U_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} * E_2$$

En tenant compte des deux sources, nous obtenons:

$$U_{BM} = U_1 + U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} * E_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} * E_2$$

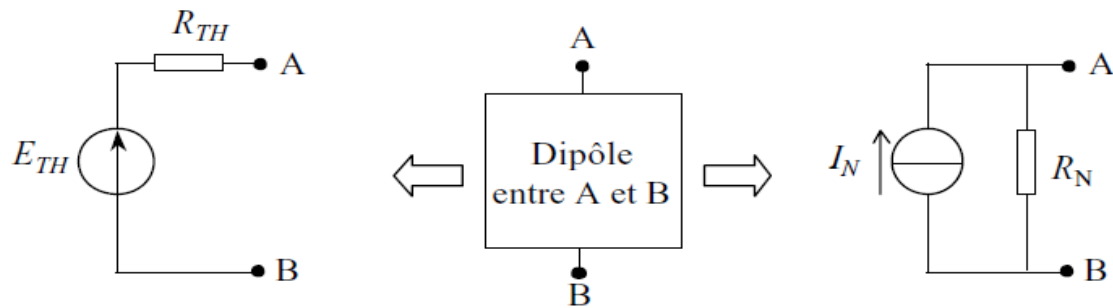
V THEOREME DE THEVENIN ET NORTHON

V-1 Introduction

Pour analyser le comportement d'un réseau électrique à plusieurs éléments pour différentes charges (calcul de la tension et du courant de sortie), il est préférable de recourir à un modèle simple sans la charge qui se met :

- Soit sous la forme d'une source réelle de tension. On parle du modèle de Thévenin.
- Soit sous la forme d'une source réelle de courant. On parle du modèle de Norton.

Les théorèmes de Thévenin et de Norton permettent de modéliser le comportement d'un dipôle. Ces théorèmes montrent qu'indépendamment de la charge, un réseau quelconque vu entre deux de ces points peut toujours être représenté par une source réelle de tension ou par une source réelle de courant.

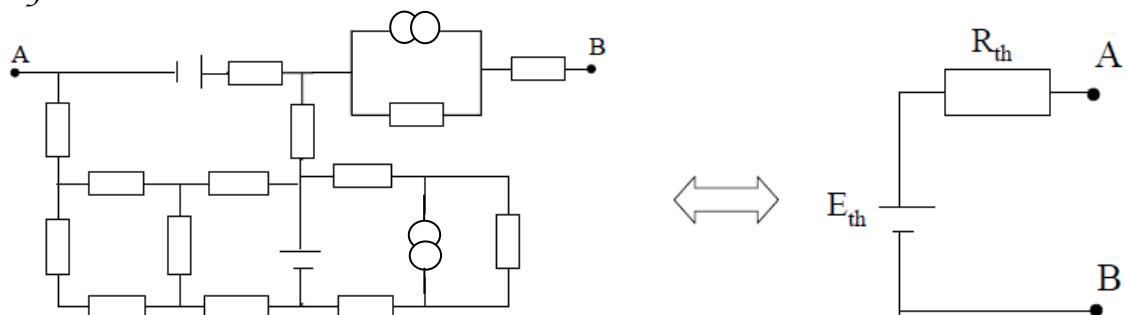


V-2 Théorème de THEVENIN

Le théorème de Thévenin a été initialement découvert par le scientifique allemand Hermann von Helmholtz en 1853, puis en 1883 par l'ingénieur télégraphe français Léon Charles Thevenin. Ce théorème se déduit principalement des propriétés de linéarité et du principe de superposition qui en découle. Il s'utilise pour convertir une partie d'un réseau complexe en un dipôle plus simple.

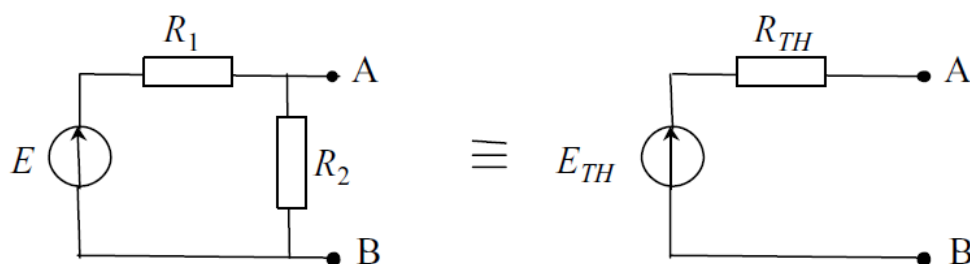
Un réseau linéaire pris entre deux nœuds quelconques (A et B) est équivalent à un générateur de tension de f.é.m. E_{Th} en série avec sa résistance interne R_{Th} .

Exemple de circuit



E_{Th} est la tension à vide du réseau c'est-à-dire la tension que l'on mesure entre A et B lorsque le circuit extérieur est ouvert ($I = 0$). R_{Th} est la résistance équivalente du réseau lorsque l'on éteint les sources indépendantes.

EXEMPLE D'APPLICATION:



La tension de Thévenin est la tension obtenue à vide entre A et B. Cette tension obtenue aux bornes de R_2 se calcule en appliquant le diviseur de tension.

$$E_{TH} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} * E$$

La résistance R_{TH} est obtenue en passivant la source de tension E . Il suffit de remplacer la source E par un court-circuit et par la suite déterminer R_{TH} vu des bornes A et B.

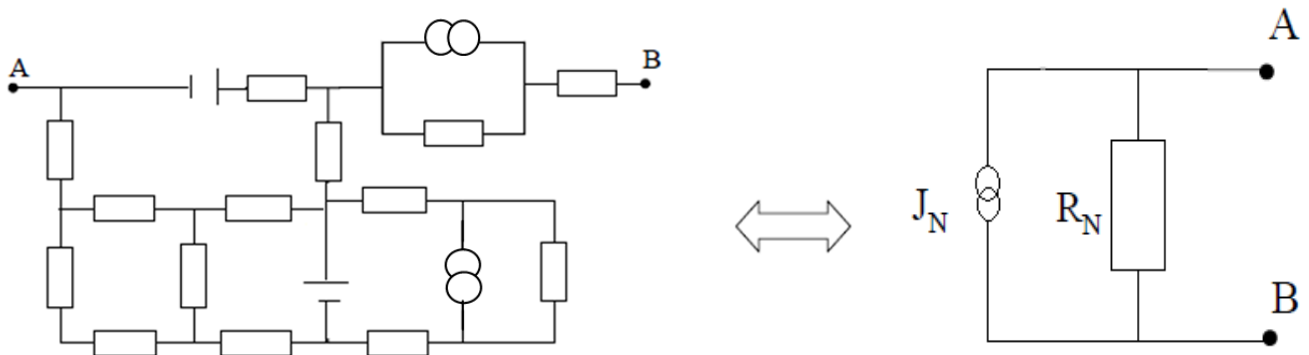
$$R_{TH} = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$$

V-3 Théorème de NORTHON

Tout circuit électrique linéaire peut être remplacé par un dipôle équivalent vis-à-vis des points A et B, c'est-à-dire vu d'un élément placé entre A et B par un générateur de Norton équivalent de courant I_N et de résistance interne R_N .

- La valeur I_N du générateur de courant équivalent est égale à l'intensité mesurée ou calculée entre A et B dans un court-circuit (charge court-circuitée).
- La résistance interne R_N correspond à la valeur de la résistance vue entre les bornes A et B lorsque les sources indépendantes sont passivées.

Exemple de circuit



J_N est le courant de court-circuit c'est-à-dire le courant que l'on mesure entre A et B lorsque le circuit extérieur est remplacé par un court-circuit.

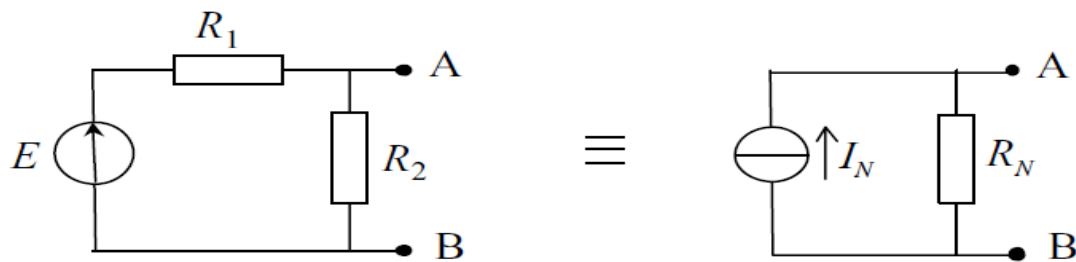
R_N est la résistance équivalente du réseau lorsque l'on éteint les sources indépendantes.

En résumé, un réseau linéaire pris entre deux nœuds quelconques (A et B) est équivalent à un générateur de courant de J_N en parallèle avec sa résistance interne R_N .

Le passage du modèle d'un générateur de Thévenin à celui d'un générateur de Norton conduit à trouver :

$$R_N = R_{TH} \quad E_{TH} = R_{TH} * I_{TH} = R_{TH} * I_N$$

EXEMPLE D'APPLICATION:



Le courant I_N est le courant obtenu en court-circuitant la résistance R_2 .

$$I_N = \frac{E}{R_1}$$

La résistance R_N est obtenue en passivant la source de tension E . Il suffit de remplacer la source E par un court-circuit et déterminer la résistance R_N vu des bornes A et B.

$$R_N = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$$

VI-4 Dualité Thévenin – Norton

Les schémas de Thévenin et de Norton sont des schémas équivalents, les deux dipôles présentent :

- 1) La même tension à vide.
- 2) Le même courant de court-circuit.
- 3) La même résistance interne.

Conformément au principe de dualité, pour trouver le schéma dual du schéma de Thévenin, nous effectuons les transformations suivantes :

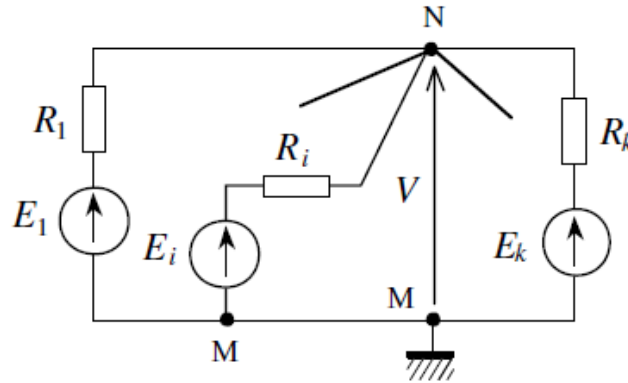
- a) Eléments en série $\Leftrightarrow$ éléments en parallèle.
- b) Tension en volt $\Leftrightarrow$ courant en ampère.
- c) Résistance en ohm $\Leftrightarrow$ conductance en siemens.

VII THEOREME DE MILMANN

Ce théorème donne une généralisation du théorème de superposition. Cette autre façon d'écrire la loi des nœuds permet de calculer la différence de potentiel entre un nœud N et le nœud de référence des potentiels.

Soit M un nœud du circuit choisi comme référence de potentiel $V_M = 0$. Supposons n branches connectées à un nœud N. Chaque branche constitue un dipôle vu entre le nœud N et celui de

référence, ce qui permet de remplacer la branche réelle par son modèle équivalent de Thévenin.



Si nous effectuons un court-circuit entre le nœud N et le nœud de référence, le courant de court-circuit (courant de Norton) est égal à la somme des courants fourni par chaque source.

$$I_N = I_{CC} = \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{R_i} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} + \dots + \frac{E_n}{R_n}$$

Lorsque nous passivons les sources de tension, toutes les résistances se trouvent en parallèle. La conductance équivalente est égale à la somme des conductances de chaque source.

Le théorème de Millman stipule que la tension calculée ou mesurée au nœud N est donc égale au produit de la résistance équivalente par la valeur de la source de courant, soit :

$$V_N = \frac{\sum_{i=1}^n E_i G_i}{\sum_{i=1}^n G_i} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 + E_3 G_3 + \dots + E_n G_n}{G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n}$$

$$V_N = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} + \dots + \frac{E_n}{R_n}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

VIII- THEOREME DE KENNELY

Ce théorème permet de transformer le schéma d'un réseau en « π » en un schéma en « T » qui est souvent beaucoup plus facile à étudier. Cette transformation est souvent appelée aussi transformation *triangle-étoile*.

Considérons trois nœuds d'un réseau électrique notés A, B et C. S'ils sont reliés deux à deux par des éléments formant une seule branche, il s'agit d'un montage triangle (ou en π) donné à la figure (3a).

Par contre si les trois branches auxquelles appartiennent les trois nœuds sont reliées à un nœud commun, le montage a une structure d'étoile comme indiqué à la figure (3b).

Pour que ces deux structures soient équivalentes, elles doivent présenter la même réponse (elles doivent présenter la même résistance).

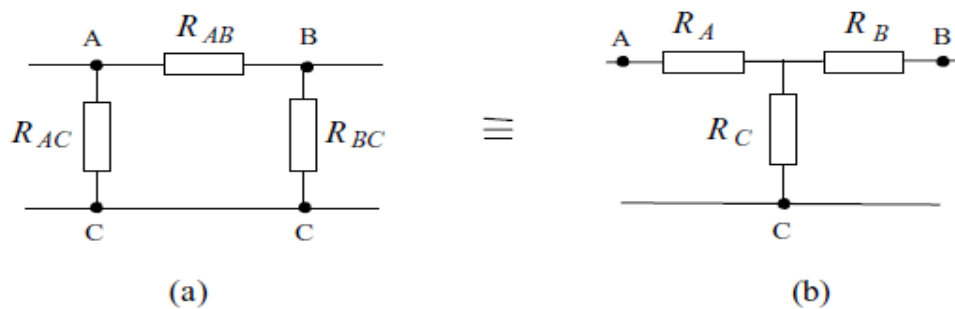


Figure 3 : Configuration triangle-étoile

Plusieurs méthodes peuvent être appliquées pour trouver les équivalences entre la structure étoile et la structure triangle. L'une de ces méthodes consiste à calculer pour chaque structure les résistances vues entre les points A – B, A – C et B – C.

Si nous court-circuitons les points B et C, la résistance vue entre A et B est :

- Dans le montage triangle : R_{AC} en parallèle à R_{AB} .
- Dans le montage étoile : R_A en série avec l'ensemble R_B et R_C en parallèle.

L'équivalence entre les deux montages s'écrit : $R_{AB} // R_{AC} = R_A + (R_B // R_C)$

Soit en passant aux conductances pour le montage en π :

$$G_{AB} + G_{AC} = \frac{R_B + R_C}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}$$

De même, en court-circuitant les bornes A et C, nous obtenons :

$$G_{AB} + G_{BC} = \frac{R_A + R_C}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}$$

Et enfin en court-circuitant les bornes A et B, nous obtenons :

$$G_{AC} + G_{BC} = \frac{R_A + R_B}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}$$

En combinant les trois relations précédentes et en revenant aux résistances, nous obtenons :

$$R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C} \quad R_{BC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A} \quad R_{AC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B}$$

Si maintenant, nous exprimons la résistance vue de deux bornes BC, AC ou AB avec, à chaque fois, la troisième borne en circuit ouvert, nous obtenons :

- Entre B et C : $R_{BC} // (R_{AB} + R_{AC}) = R_B + R_C$.
- Entre A et C : $R_{AC} // (R_{AB} + R_{BC}) = R_A + R_C$.
- Entre A et B : $R_{AB} // (R_{AC} + R_{BC}) = R_A + R_B$.

En combinant ces trois équations, nous obtenons :

$$R_A = \frac{R_{AB} R_{AC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}} \quad R_B = \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}} \quad R_C = \frac{R_{AC} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}}$$

Exercice

Une source de tension continue délivre une tension d'amplitude E dans le circuit appelé « pont de Wheatstone » représenté à la figure 4.

1. Déterminer l'expression de la résistance équivalente R_{eq} vue entre les bornes A et B. En déduire l'expression du courant I .

Cas particulier : $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$.

2. On prend le cas particulier ($R_1 = R_3 = R/2$ et $R_2 = R_4 = R$), déterminer l'expression du courant I_R qui circule dans la résistance R .

3. On suppose maintenant que la résistance R représente la résistance interne d'un ampèremètre. Donner la condition sur les résistances R_1 , R_2 , R_3 et R_4 pour avoir un courant I_R nul.

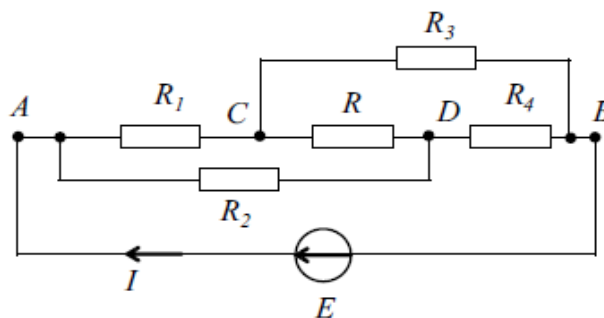
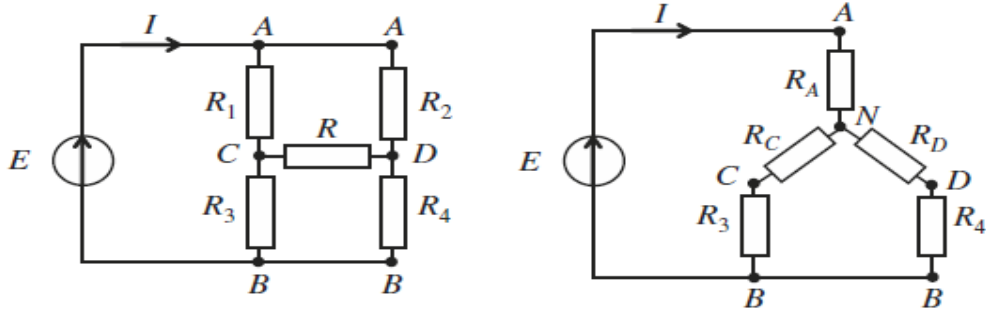


Figure 4 : Pont de Wheatstone

Solution

On commence par présenter le circuit d'une autre façon. On peut ensuite transformer les trois résistances R_1 , R_2 , et R qui sont branchées en triangle, en une représentation équivalente en étoile formée par R_A , R_C , et R_D .



Dans le cas d'une représentation étoile, les expressions des différentes résistances

$$\text{sont : } R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3} \quad R_C = \frac{R_1 R}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3} \quad R_D = \frac{R R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}$$

Entre le point N et le point B, on a deux résistances en parallèles. La résistance équivalente R_{eq} du circuit devient :

$$R_{\text{eq}} = R_A + [(R_C + R_3) \parallel (R_D + R_4)] \quad R_{\text{eq}} = \frac{R}{3} + \left[\left(\frac{R}{3} + R \right) \parallel \left(\frac{R}{3} + R \right) \right] = \frac{R}{3} + \left[\left(\frac{4R}{3} \right) \parallel \left(\frac{4R}{3} + R \right) \right]$$

$$R_{\text{eq}} = \frac{R}{3} + \frac{\frac{4R}{3} * \frac{4R}{3}}{\frac{4R}{3} + \frac{4R}{3}} = \frac{R}{3} + \frac{16R^2}{9} * \frac{16R^2}{9} * \frac{3}{8R} = \frac{R}{3} + \frac{2R}{3} = R$$

Le courant qui circule dans la résistance équivalente est : $I = \frac{E}{R_{\text{eq}}} = \frac{E}{R}$

CHAPITRE IV : LES QUADRIPOLES

I DEFINITION

Un quadripôle est un réseau qui comporte 4 bornes de liaisons avec les circuits extérieurs. Deux bornes placées à l'entrée du quadripôle et deux autres placées à la sortie de ce même quadripôle. C'est un réseau électrique permettant le transfert d'énergie entre deux dipôles. Le quadripôle est caractérisé par les deux grandeurs d'entrées V_1 , I_1 et les deux grandeurs de sorties V_2 , I_2 reliées par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} f(V_1, I_1, I_2, V_2) = 0 \\ g(V_1, I_1, I_2, V_2) = 0 \end{cases}$$

I_1 et V_1 désignent les grandeurs d'entrée.
 I_2 et V_2 désignent les grandeurs de sortie.

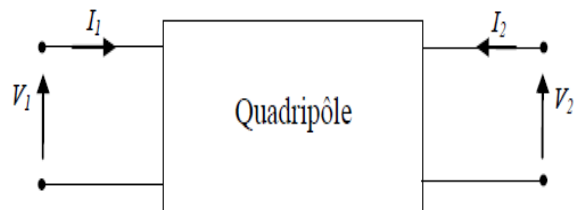


Figure 1 : Symbole du quadripôle

Très souvent, le quadripôle est en fait un tripôle, en ce sens qu'une borne de l'entrée et une borne de la sortie sont reliées par un court-circuit interne. Ces bornes communes sont le plus souvent mises à la terre. Le conducteur commun est appelé *masse*.

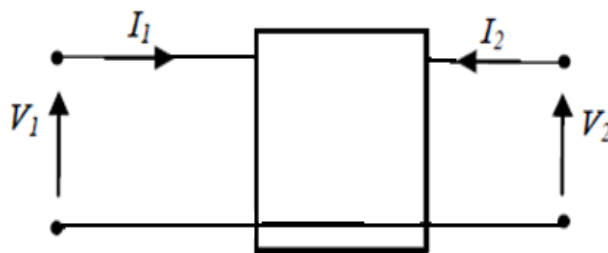


Figure 2 : Symbole du tripôle

II REPRESENTATION MATRICIELLE D'UN QUADRIPOLE

II-1 Matrice impédance

Le schéma interne de tout quadripôle équivalent en matrice Z est donné à la figure 3.

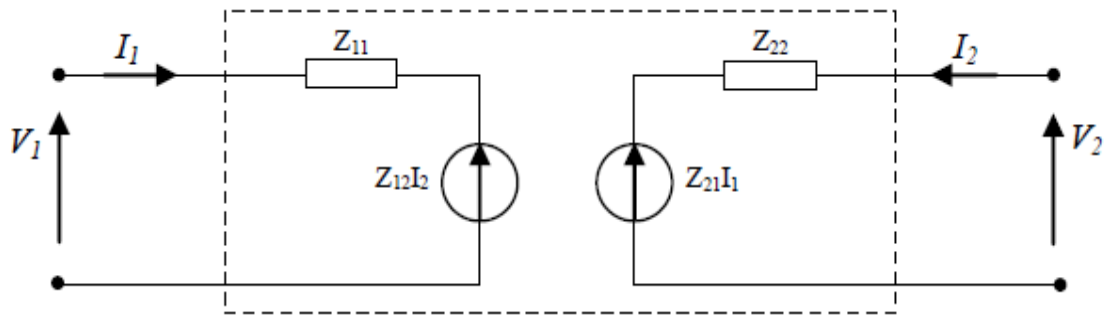


Figure 3 : Schéma équivalent d'un quadripôle en paramètres Z

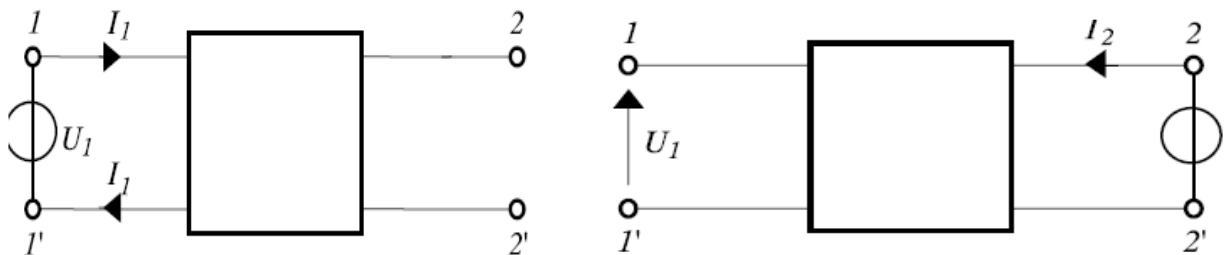
Les équations caractéristiques de ce quadripôle peuvent se mettre sous la forme:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}$$

Ou encore sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$[Z]$ est la matrice impédance du quadripôle. Les éléments de cette matrice s'appellent les paramètres Z. On calcule la valeur des éléments de cette matrice en imposant une source à un accès et laissant l'autre en circuit ouvert.



Ainsi par exemple si la sortie est à circuit ouvert, les éléments Z_{11} et Z_{21} de la matrice $[Z]$ se réduisent à :

Impédance d'entrée: $Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0}$

Impédance de transfert direct: $Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$

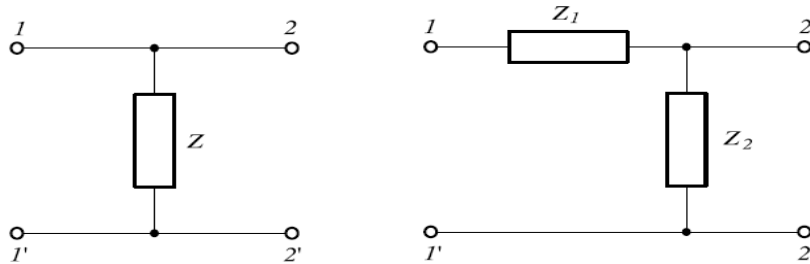
Si l'entrée est à circuit ouvert, les éléments Z_{12} et Z_{22} de la matrice $[Z]$ se réduisent à :

Impédance de transfert inverse: $Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$

Impédance de sortie: $Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}$

Exemple:

Trouver les paramètres Z des deux quadripôles suivants :



$$Z = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & Z \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 \end{bmatrix}$$

II-2 Matrice admittance

Le schéma de ce quadripôle équivalent est donné à la figure 4:

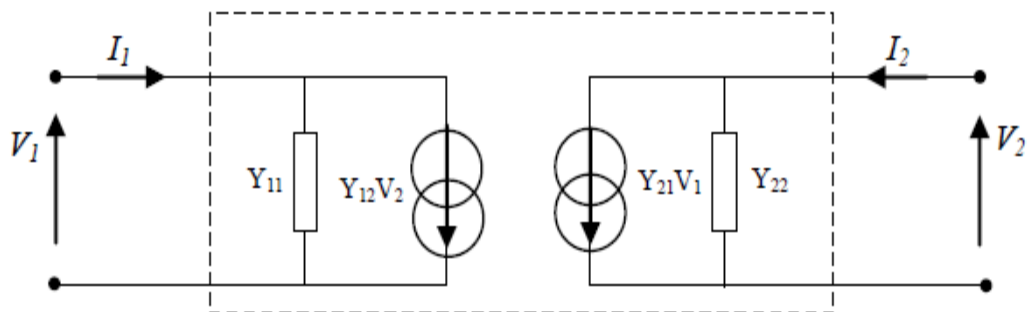


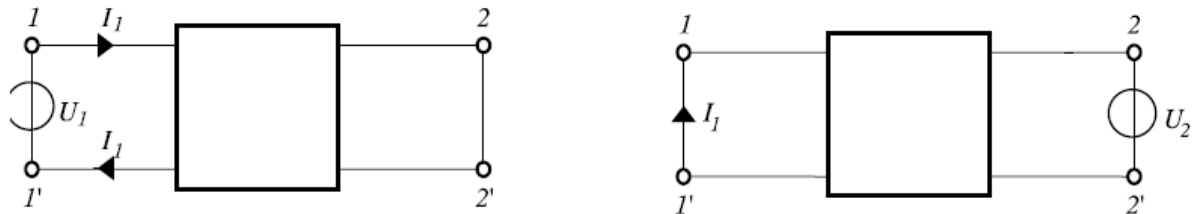
Figure 4 : Schéma équivalent d'un quadripôle en paramètres Y.

Les équations caractéristiques de ce quadripôle peuvent se mettre sous la forme:

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \end{cases}$$

Ou encore sous forme matricielle:
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$[Y]$ est la matrice admittance du quadripôle. Les éléments de cette matrice s'appellent les paramètres Y . La matrice $\mathbf{Y}$ est évidemment l'inverse de la matrice $\mathbf{Z}$. On calcule la valeur des éléments de cette matrice en imposant une source à un accès et en mettant l'autre en court-circuit.



Ainsi par exemple si la sortie est en court circuit, les éléments Y_{11} et Y_{21} de la matrice $[Y]$ se réduit à :

Admittance d'entrée: $Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0}$

Admittance de transfert direct: $Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0}$

Si l'entrée est mise en court circuit, les éléments Y_{12} et Y_{22} de la matrice $[Y]$ se réduit à :

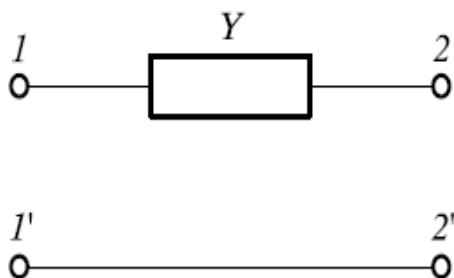
Admittance de transfert inverse: $Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0}$

Admittance de sortie: $Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0}$

Comme on a vu que la matrice $[Y]$ est l'inverse de la matrice $[Z]$, donc $[Y] = [Z]^{-1}$

Exemple:

Trouver les paramètres Y du quadripôle suivant :



$$Y = \begin{bmatrix} Y & -Y \\ -Y & Y \end{bmatrix}$$

II-3 Matrice hybrides

Les matrices hybrides correspondent au cas où les variables indépendantes sont de nature différente, un courant et une tension, relatives à des accès différents. Dans ce cas, nous exprimons la tension d'entrée V_1 et le courant de sortie I_2 en fonction du courant d'entrée I_1 et de la tension de sortie V_2 ce qui donne:

$$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [h] \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

h_{11} , h_{12} , h_{21} et h_{22} sont les paramètres hybrides de la matrice hybride $[h]$, avec

Impédance d'entrée: $h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}$

L'amplification en courant: $h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$

Rapport de transfert inverse: $h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}$

Admittance de sortie: $h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$

Le schéma de ce quadripôle équivalent est donné à la figure 5 :

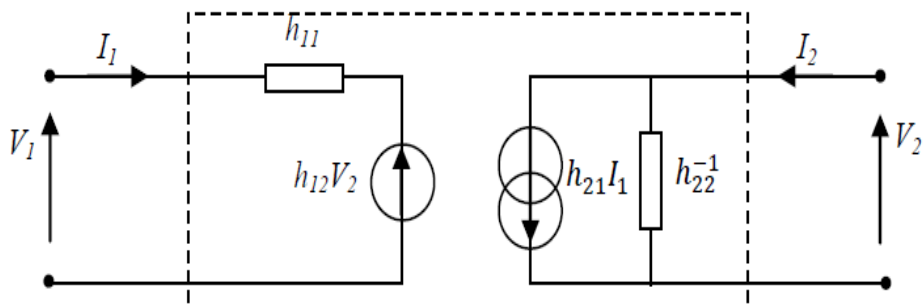


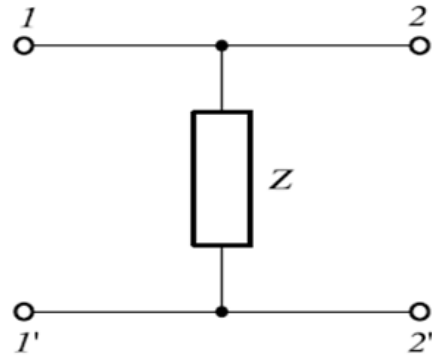
Figure 5 : Schéma équivalent d'un quadripôle en paramètres hybrides

Contrairement aux matrices d'impédance et d'admittance, les éléments des matrices hybrides ne sont évidemment pas homogènes. Deux éléments n'ont pas de dimensions et sont des coefficients de transfert en courant ou en tension. Les deux autres ont l'un la dimension d'une impédance, l'autre celui d'une admittance.

Exemple:

Le quadripôle en shunt a pour paramètres hybrides :

$$h_{11}=0, \quad h_{12}=1, \quad h_{21}=-1, \quad h_{22}=1/Z$$



II-4 Matrice de transfert

Si les deux grandeurs indépendantes sont relatives au même accès, la matrice est appelée matrice de chaîne T (de transmission ou de transfert). On exprime les grandeurs de sortie en fonction des grandeurs d'entrée:

$$\begin{cases} V_2 = T_{11} V_1 - T_{12} I_1 \\ I_2 = T_{21} V_1 - T_{22} I_1 \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

T_{11} est l'amplification en tension.

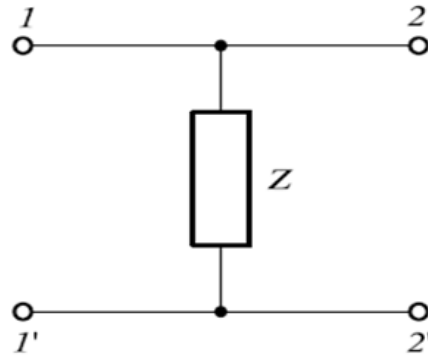
T_{22} est l'amplification en courant.

T_{12} est une impédance et T_{21} une admittance.

Exemple:

Le quadripôle en shunt de la figure ci contre a pour matrice de chaîne :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix}$$



III CARACTERISTIQUES D'UN QUADRIPOLE EN CHARGE ET ATTAQUEE PAR UNE SOURCE DE TENSION REELLE

Pour caractériser un quadripôle, on connecte un dipôle source (E_g , R_g) aux deux bornes d'entrée. Aux deux bornes de sortie, nous branchons un dipôle de charge noté Z_U

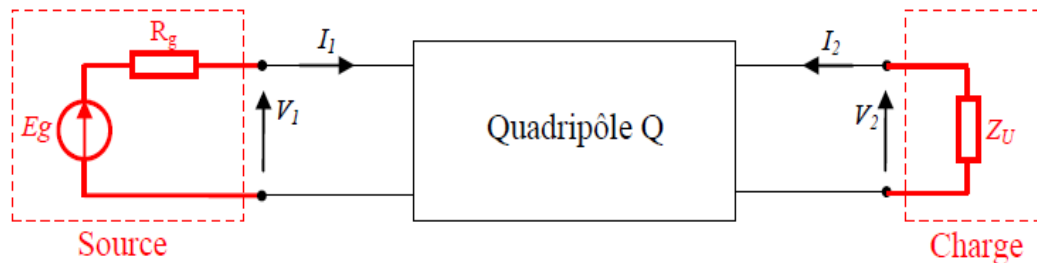


Figure 6 : Quadripôle en charge et attaqué par une source de tension réelle

Pour définir le quadripôle Q par ses paramètres Z, il faut savoir les équations qui permettent de déterminer l'état du réseau et qui sont:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \dots\dots\dots(1) \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \dots\dots\dots(2) \\ E_g = V_1 + R_g I_1 \dots\dots\dots(3) \\ V_2 = -Z_u I_2 \dots\dots\dots(4) \end{cases}$$

III-1 Impédance d'entrée

L'impédance d'entrée est l'impédance « vue » par la source qui attaque le quadripôle à vide ou en charge.

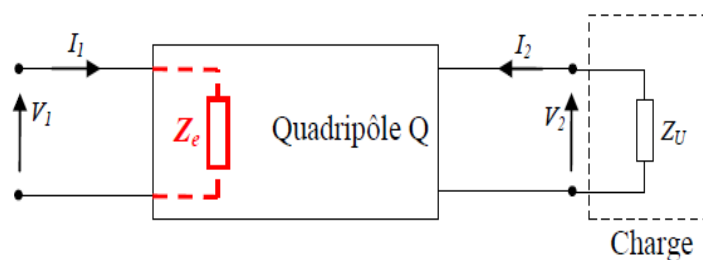


Figure 7 : Impédance d'entrée d'un quadripôle

L'impédance d'entrée est donnée par: $Z_e = \frac{V_1}{I_1}$

Si nous utilisons les paramètres Z (les équations (1), (2) et (4)), nous obtiendrons:

$$-Z_u I_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \quad \text{ce qui donne} \quad I_2 = \frac{-Z_{21} I_1}{Z_{22} + Z_u}$$

Et de là, on aura l'impédance d'entrée suivante : $Z_e = Z_{11} - \frac{Z_{21} Z_{12}}{Z_{22} + Z_u}$

III-2 Impédance de sortie

Vis-à-vis de la charge, le quadripôle se comporte comme un dipôle équivalent au générateur de Thévenin.

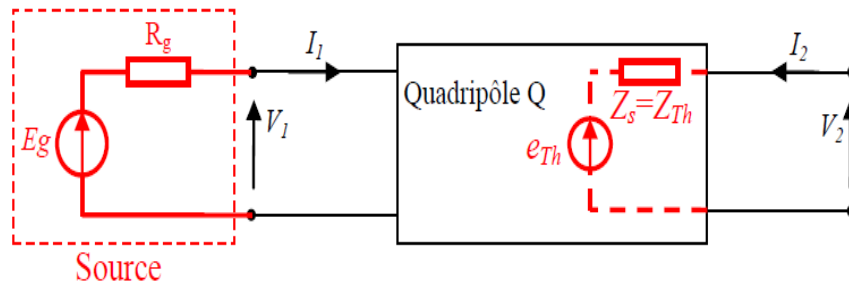


Figure 8 : Représentation de la sortie du quadripôle par son équivalent de Thévenin.

L'impédance de sortie est donnée par: $Z_s = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{E_g=0}$

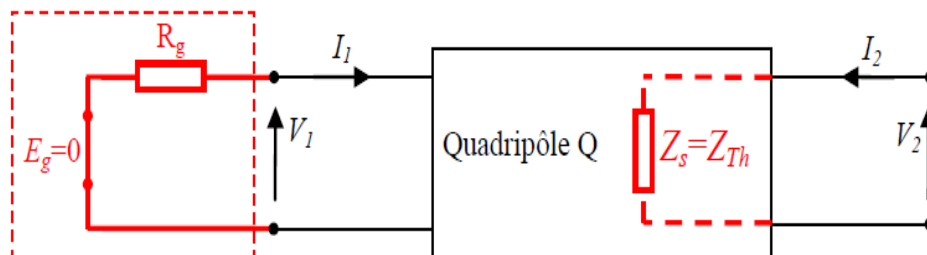


Figure 9 : Schéma utilisé pour le calcul de Zs.

Si nous utilisons les paramètres Z (les équations (1), (2) et (3)), nous obtiendrons:

$$Z_s = Z_{22} - \frac{Z_{21} Z_{12}}{R_g + Z_{11}}$$

III- 3 Gain en tension

Le gain en tension est défini par le rapport de la tension de sortie V_2 du quadripôle par la

tension d'entrée V_1 :
$$G_v = \frac{V_2}{V_1}$$

Si le quadripôle est défini par les paramètres Z et par l'utilisation des équations (1), (2), (3) et

(4), il résulte:
$$G_v = \frac{Z_{21}Z_U}{Z_{11}Z_U + \Delta Z}$$

III-4 Gain en courant

Le gain en courant est défini par le rapport du courant de sortie I_2 du quadripôle par le courant

d'entrée I_1 :
$$G_i = \frac{I_2}{I_1}$$

Si le quadripôle est défini par les paramètres Z et par l'utilisation des équations (2) et (4), il résulte:

$$G_i = -\frac{Z_{21}}{Z_{22} + \Delta Z}$$

Application

Calculer l'impédance d'entrée, l'impédance de sortie, le gain (l'amplification) en tension et le gain (l'amplification) en courant du quadripôle de la figure 10. Le quadripôle est attaqué par une source E_g de résistance interne R_g et chargé par l'impédance Z_L .

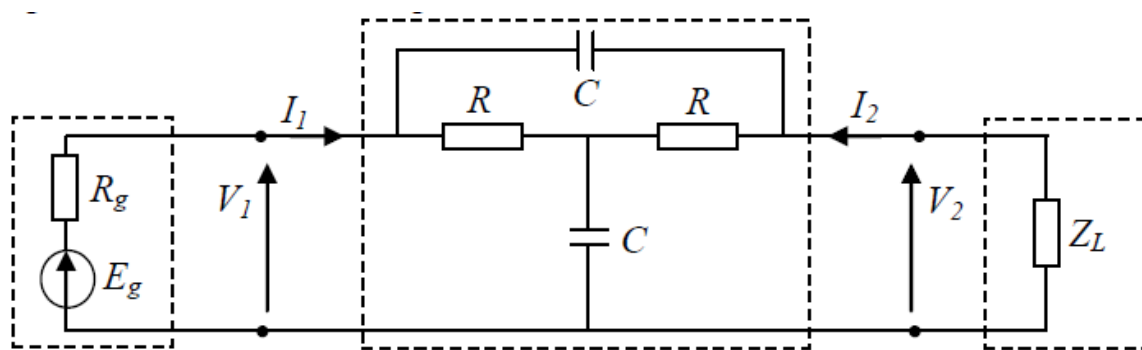


Figure 10 : Quadripôle en T ponté

Nous commençons par le calcul des paramètres Z du quadripôle. En utilisant le théorème de Kennelly, le schéma du quadripôle devient:

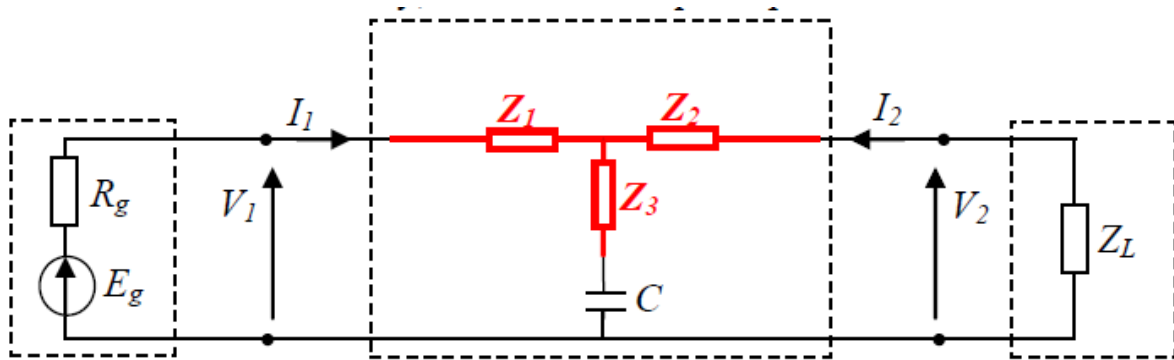


Figure 11 : Transformation Kennely

Avec

$$Z_1 = Z_2 = \frac{R^* Z_c}{2R + Z_c} \quad Z_3 = \frac{R^2}{2R + Z_c}$$

Les paramètres Z sont donnés par :

$$Z_{11} = Z_1 + (Z_3 + Z_c) \quad Z_{22} = Z_1 + (Z_3 + Z_c) = Z_{11}$$

$$Z_{12} = Z_3 + Z_c \quad Z_{21} = Z_3 + Z_c = Z_{12}$$

Il est clair que le déterminant de la matrice Z est égal à zéro : $\Delta Z = 0$

$$Z_e = \frac{Z_U Z_{11} + \Delta Z}{Z_U + Z_{22}} = \frac{Z_U Z_{22}}{Z_U + Z_{22}} \quad Z_s = \frac{-Z_{21} Z_{12}}{R_g + Z_u} = \frac{R_g Z_{11}}{R_g + Z_{11}}$$

$$Gi = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} = -G_v$$

$$G_v = \frac{Z_{21}}{Z_{11}}$$

IV ASSOCIATION DE QUADRIPOLES

IV-1 Association en série de deux quadripôles

Dans ce cas, la tension d'entrée (de sortie) du quadripôle résultant est la somme des tensions d'entrée (de sortie) des quadripôles associés en série:

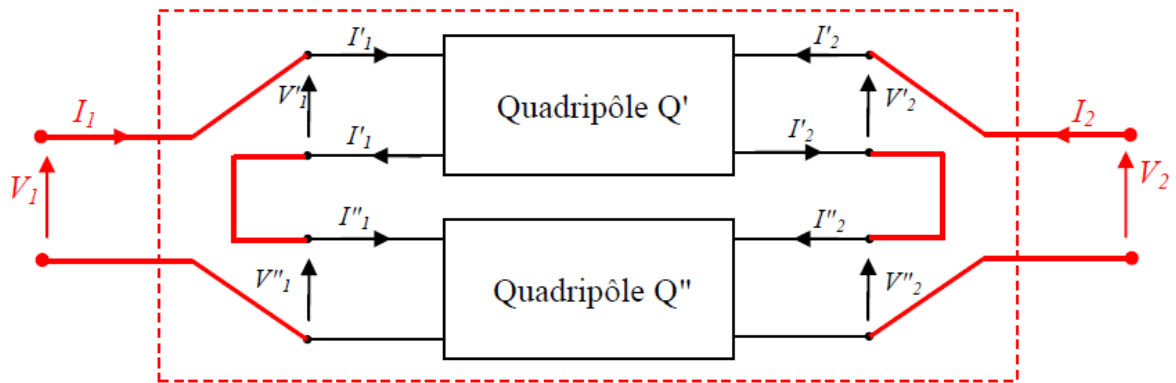


Figure 12 : Quadripôle en série

$$V_1 = V'_1 + V''_1 \text{ et } V_2 = V'_2 + V''_2$$

Les courants sont identiques: $I_1 = I'_1 = I''_1$ et $I_2 = I'_2 = I''_2$

La matrice $[Z]$ du quadripôle équivalent à la mise en série de Q' et Q'' est donnée par:

$$[Z] = [Z'] + [Z'']$$

IV-2 Association en parallèle de deux quadripôles

Dans ce cas, le courant d'entrée (de sortie) du quadripôle équivalent est la somme des courants d'entrée (de sortie) des quadripôles associés en parallèle.

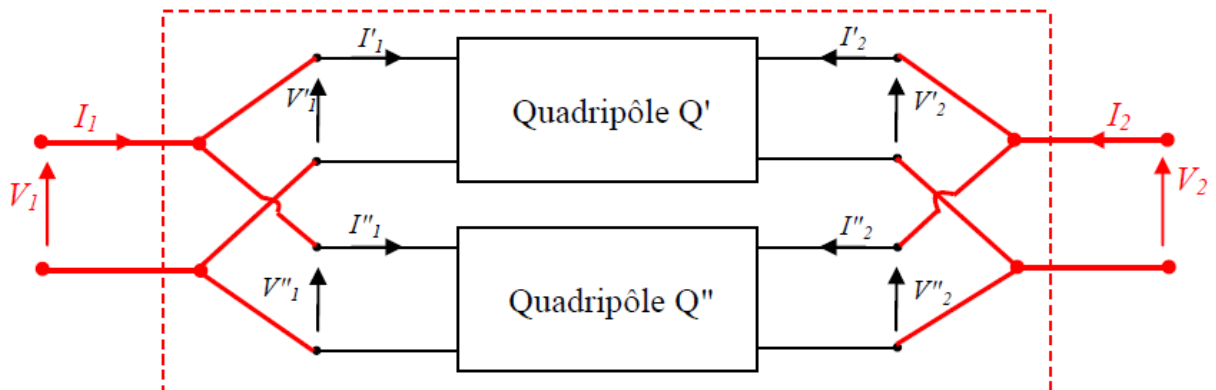


Figure 13 : Quadripôle en parallèle

La matrice $[Y]$ du quadripôle équivalent à la mise en parallèle de Q' et Q'' est donnée par:

$$[Y] = [Y'] + [Y'']$$

Démonstration

$$I_1 = I' + I''$$

$$V_1 = V_1' = V_1''$$

$$\text{Comme on a déjà } I_1 = [Y] V_1 \quad I_1' = [Y'] V_1' \quad I_1'' = [Y''] V_1''$$

Alors, on pourra tirer la matrice résultante Y

$$I_1 = [Y] V_1 = [Y'] V_1' + [Y''] V_1'' = [Y' + Y''] V_1 \quad [Y] = [Y'] + [Y'']$$

IV-3 Association en cascade de deux quadripôles

Dans ce cas, la tension de sortie du premier quadripôle est la tension d'entrée du deuxième quadripôle comme il est présenté dans la figure 14.

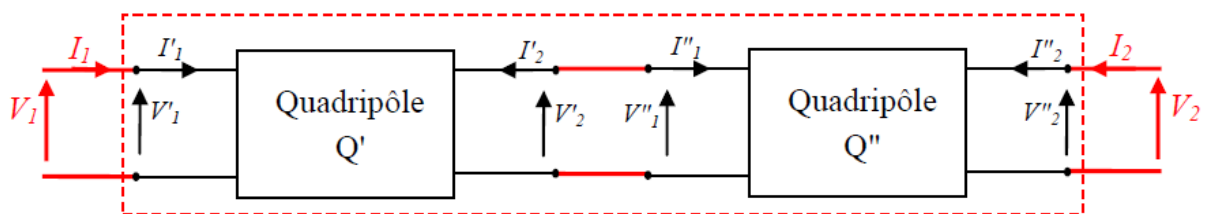


Figure 14 : Quadripôle en cascade

La matrice $[T]$ du quadripôle équivalent à la mise en cascade de Q' et Q'' est donnée par :

$$[T] = [T'] * [T'']$$

$$V_1 = V_1' \text{ et } V_2' = V_1'' \text{ et } V_2 = V_2''$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [T] * \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_2' \\ I_2' \end{bmatrix} = [T'] * \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [T''] * \begin{bmatrix} V_1'' \\ I_1'' \end{bmatrix}$$

Comme on a $V_2' = V_1''$ et $I_2' = I_1''$ nous obtenons donc :

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [T''] * \begin{bmatrix} V_2' \\ I_2' \end{bmatrix} = [T''] * [T'] * \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

La matrice de chaîne de deux quadripôles en cascade est donc le produit des matrices de chaînes partielles. Comme la multiplication matricielle n'est pas une opération commutative, il faut prendre garde à l'ordre dans lequel les quadripôles sont connectés. L'emploi de la matrice T permet de ranger les matrices dans le même ordre que les quadripôles.

Application : Produit de deux matrices

Soit la matrice du quadripôle 1 : $T' = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$

Soit la matrice du quadripôle 2 : $T' = \begin{bmatrix} n & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix}$

Alors la matrice de transfert totale est la suivante:

$$T = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} n & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n^2 & 0 \\ \frac{1}{Zn} & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

IV-4 Quadripôles entrée série-sortie parallèle

Il est clair que l'addition de deux matrices hybrides correspond à la mise en série de deux accès et à la mise en parallèle de deux autres, pourvu que les quadripôles entrant dans la connexion vérifient le test de Brune correspondant. La figure 15 donne un exemple de ce test pour une connexion mixte où l'on additionne les matrices.

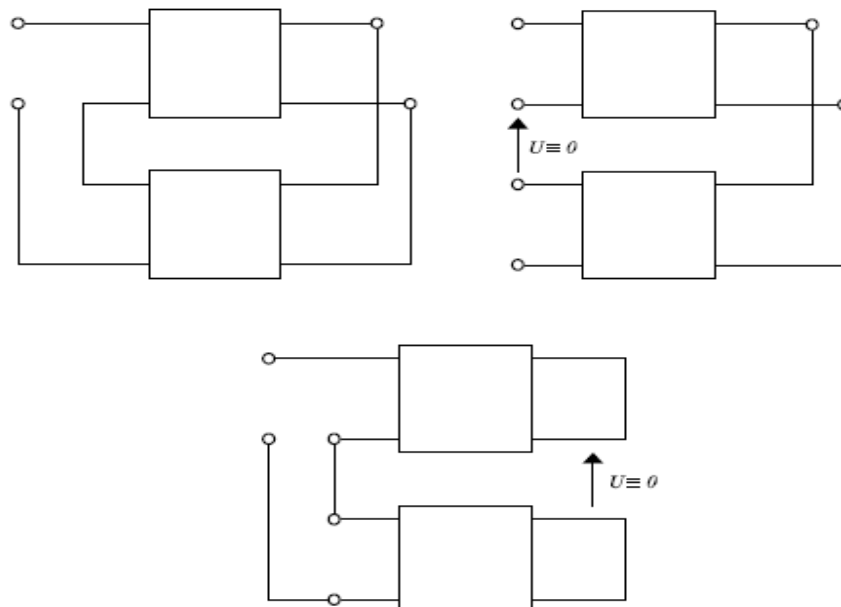


Figure 15 : Quadripôle avec entrée série-sortie parallèle

CHAPITRE V : DIAGRAMME DE BODE

I DEFINITION

Le diagramme de Bode est un moyen de représenter le comportement fréquentiel d'un système. C'est une représentation qui consiste à tracer séparément d'une part, la variation du module et d'autre part, la variation de l'argument de la fonction de transfert d'un système en fonction de la fréquence (ou de la pulsation). Il permet une résolution graphique simplifiée afin de visualiser rapidement la marge de gain, la marge de phase, le gain continu, la bande passante, le rejet des perturbations et la stabilité des systèmes.

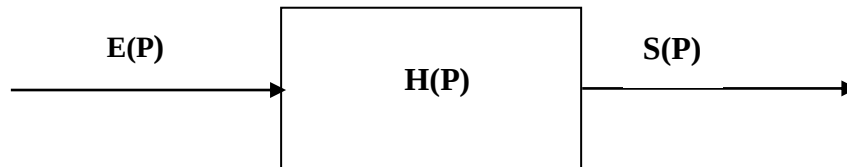
II FONCTION DE TRANSFERT

La fonction de transfert est une représentation mathématique de la relation entre l'entrée et la sortie d'un système.

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 e(t)$$

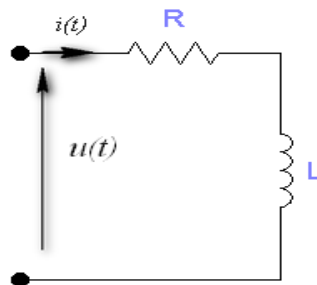
$$a_n p^n S(p) + \dots + a_0 S(p) = b_m E(p) + \dots + b_0 E(p)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{a_n p^n + \dots + a_0}$$



La fonction de transfert peut être assimilée à un gain complexe dont il suffit juste de le déterminer (module et argument) ensuite tracer les courbes de variation du module (ou gain) et du déphasage en fonction de la fréquence (ou de la pulsation).

Exemple 1: Circuit RL



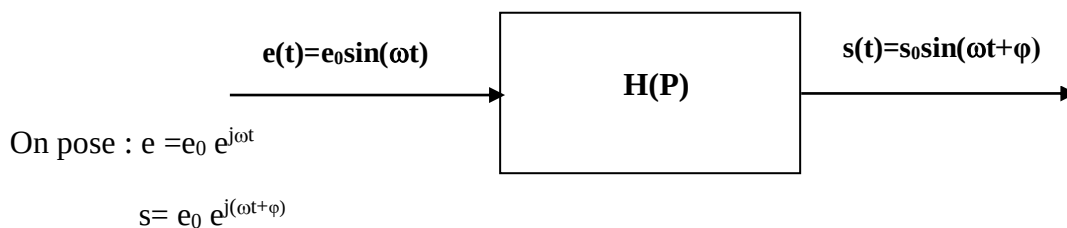
✓ Equation différentielle : $u(t) = R i(t) + L \frac{di}{dt} \quad i(0) = 0$

✓ Loi d'Ohm (impédance complexe) : $U = R I + L j \omega I$
 $U = R I + L p I$

✓ Fonction de transfert : $H(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{1}{R + L p} = \frac{1}{R} \frac{1}{1 + \frac{L}{R} p}$

III ANALYSE FREQUENTIELLE OU HARMONIQUE

On étudie la réponse d'un système soumis en entrée à un signal sinusoïdal en régime permanent.



$$H(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots b_m(j\omega)^m}{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots a_n(j\omega)^n}$$

On réarrange l'expression de la fonction de transfert pour séparer la partie réelle de la partie imaginaire, pour mieux calculer l'amplitude et la phase.

Exemple 2: Soit la fonction suivante : $H(p) = \frac{s}{e} = \frac{1}{p + 2}$

Calculer la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel.

Réponse :

La fonction de transfert est : $H(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{1}{2 + j\omega}$

On transforme pour séparer la partie imaginaire de la partie réelle. Pour cela, on multiplie par $(2 - j\omega)$ afin d'éliminer la partie imaginaire au dénominateur.

$$H(j\omega) = \frac{1}{2 + j\omega} * \frac{2 - j\omega}{2 - j\omega} = \frac{2 - j\omega}{4 + \omega^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{2}{4 + \omega^2} - \frac{j\omega}{4 + \omega^2}$$

L'amplitude est :

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{2}{4+\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{4+\omega^2}\right)^2} = \sqrt{(4+\omega^2) * \left(\frac{1}{4+\omega^2}\right)^2} = \frac{1}{4+\omega^2} \sqrt{4+\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}$$

La phase est : $\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Le module de $H(j\omega)$ donne donc le **gain G** du système qui n'est autre que le rapport entre les amplitudes d'entrée et de sortie.

L'argument de $H(j\omega)$ donne le **déphasage ϕ** entre l'entrée et la sortie qui n'est autre qu'un retard de la sortie sur l'entrée

Mais il convient de remarquer que si très naturellement nous choisissons d'exprimer $\phi(\omega)$ en radians (ou en degrés), nous préférons utiliser des logarithmes pour représenter le module de $H(j\omega)$. Nous adoptons aussi, pour le module et pour la phase, des unités en $\log(\omega)$ en abscisses.

IV ECHELLE LOGARITHMIQUE

On utilise des échelles logarithmiques pour les courbes de Bode parce qu'elles simplifient considérablement leur tracé, leur manipulation et leur interprétation. On utilise une échelle logarithmique pour l'axe ω (abscisse) parce qu'on peut tracer l'amplitude et la phase sur un plus grand intervalle de fréquence qu'avec des axes de fréquence linéaires, ou toutes les fréquences comptant pareil, d'autant plus que ces courbes donnent souvent des lignes droites. L'échelle logarithmique permet un tracé très lisible, car il est composé majoritairement de tronçons linéaires.

V FORME DE BODE D'UN SYSTEME LINEAIRE DU PREMIER ORDRE

L'analyse des systèmes asservis à l'aide de la méthode de Bode utilise les représentations graphiques de $H(j\omega)$. Le diagramme de Bode est utilisé pour représenter la réponse harmonique d'un système dynamique. On représente $H(j\omega)$ sur **2 courbes alignées** en fonction de la pulsation ω . L'échelle utilisé est l'échelle logarithmique, l'abscisse gradué en $\log(\omega)$

- ✓ Le gain G_{dB} en décibels (dB) : **$G = 20 \log |H(j\omega)|$**
- ✓ La phase ϕ en degrés ou radians : **$\phi = \text{Arg}(H(j\omega))$**

Diagramme d'amplitude : Représentation du logarithme du module $20 \log_{10}(G)$ [dB] en fonction du logarithme de la pulsation ω ou de la fréquence f .

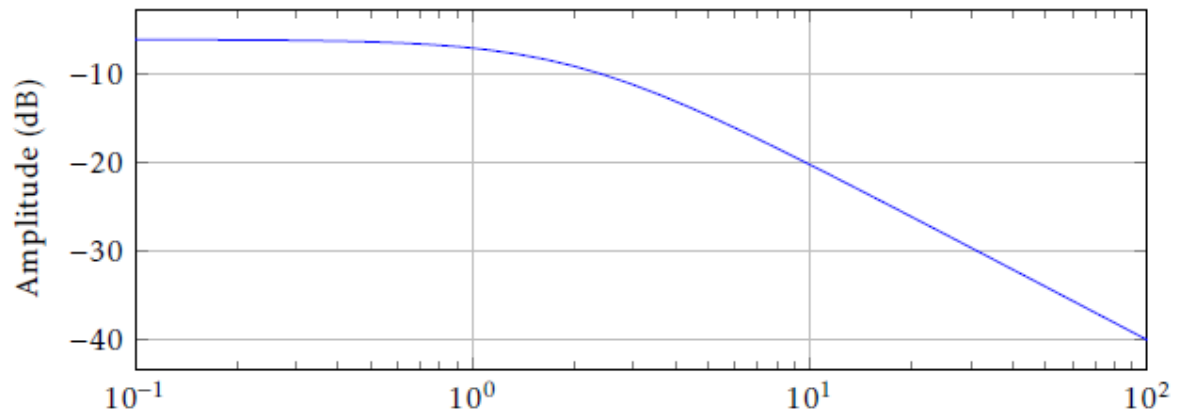
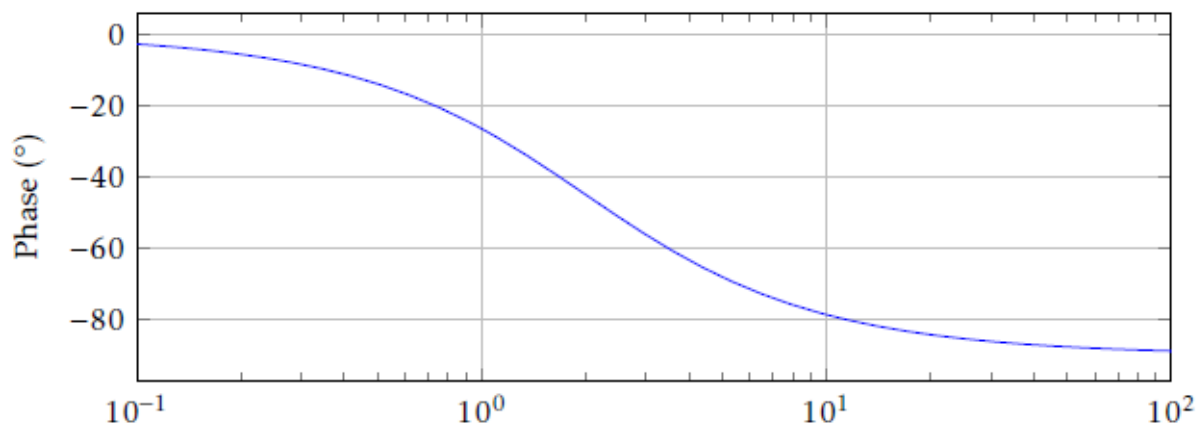


Diagramme de phase : Représentation du déphasage ϕ en fonction du logarithme de la pulsation ω ou de la fréquence f .



Il est relativement aisé de dessiner dans ces deux diagrammes les asymptotes correspondantes à un certain domaine fréquentiel. La connaissance de ces asymptotes est en général suffisante pour extraire l'information principale contenue dans le diagramme de Bode.

L'échelle des pulsations est logarithmique et est exprimée en rad/s (radian par seconde).

Soit le système du premier ordre suivant : $H(p) = \frac{\gamma}{\tau p + 1}$

Amplitude :
$$|H(j\omega)| = \left| \frac{\gamma}{\tau j\omega + 1} \right| = \left| \frac{\gamma(1 - \tau j\omega)}{\tau^2 \omega^2 + 1} \right| = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$$

$$\Rightarrow 20 \log_{10} |H(j\omega)| = 20 \log_{10}(\gamma) - 10 \log_{10}(1 + \tau^2 \omega^2)$$

Le calcul des asymptotes

Diagramme du module

a) Lorsque $\tau\omega \ll 1$, alors $\Rightarrow \log_{10} |H(j\omega)| \rightarrow \log_{10}(\gamma)$. Asymptote horizontale passant par γ à basse fréquence.

b) Lorsque $\tau\omega \gg 1$, alors $\Rightarrow 20 \log_{10} |H(j\omega)| = 20 \log_{10}(\gamma) - 10 \log_{10}(\tau^2 \omega^2)$
 $\Rightarrow 20 \log_{10} |H(j\omega)| = 20 \log_{10} \left(\frac{\gamma}{\tau^2 \omega^2} \right) \Rightarrow |H(j\omega)| \rightarrow \frac{\gamma}{(\tau\omega)}$ Asymptote haute fréquence de pente -20 [dB/décade] passant par γ .

L'abscisse du point d'intersection des deux asymptotes, indiquée ici par ω_b , correspond à la

valeur absolue du pôle de G(s). $\omega_b = \left| \frac{-1}{\tau} \right| = \frac{1}{\tau}$

Diagramme de phase

$$\phi = \text{Arg} \left(\frac{\gamma}{\tau j\omega + 1} \right) = \text{Arg} \left(\frac{\gamma(\tau j\omega - 1)}{\tau^2 \omega^2 + 1} \right) - \text{art}(\tau\omega) = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$$

a) si $\omega \rightarrow 0$ alors $\phi \rightarrow 0$ (Asymptote horizontale)

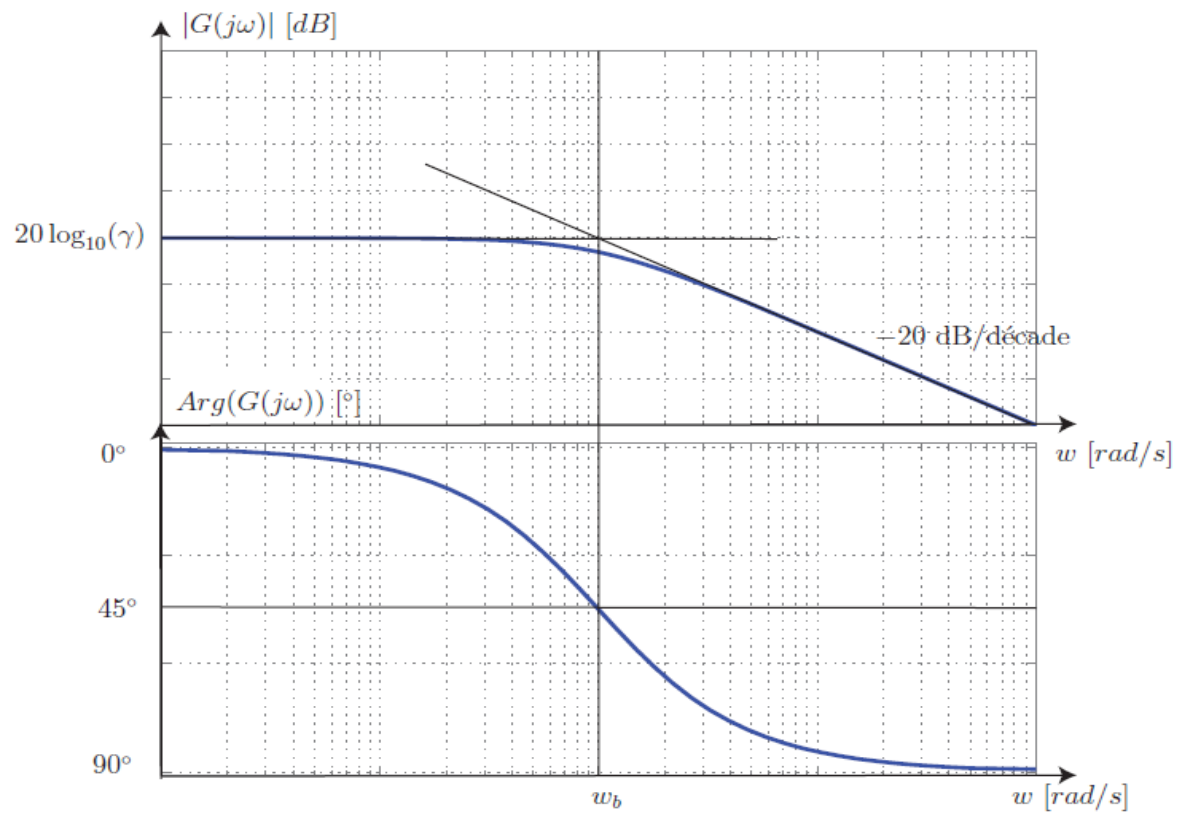
b) si $\omega \rightarrow \infty$ alors $\frac{\pi}{2} \rightarrow 1$ (Asymptote horizontale)

Le tracé du diagramme de phase permet de visualiser la bande passante du système. Il s'agit de l'intervalle de fréquence $[0, \omega_b]$ pour lequel le rapport d'amplitude est supérieur ou égal à

$\frac{\gamma}{\sqrt{2}}$ et le déphasage à -45° .

ω_b n'est autre que la pulsation de coupure. On parle aussi de la fréquence de coupure. Cette dernière représente la fréquence pour laquelle le circuit bloque les fréquences indésirables. Elle est notée généralement par f_0 .

Le tracé des deux diagrammes



CHAPITRE VI : TRANSFORMEE DE LAPLACE

I INTRODUCTION

Plusieurs techniques utilisées dans la résolution de problèmes d'engineering sont basées sur le remplacement des fonctions de la variable réelle (temps ou distance) par certains développements dépendant de la fréquence ou par des fonctions de la variable complexe dépendant de la fréquence. Dans ce chapitre, nous exposerons une technique de transformation des fonctions du temps en des fonctions de la variable complexe dépendant de la fréquence. On l'appelle transformation de Laplace, elle permet la résolution d'équations différentielles.

II LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

Soit $f(t)$ une fonction réelle de la variable réelle t , définie par $t > 0$. Alors :

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \Rightarrow \text{transformée de Laplace de } f(t). p \text{ est une variable complexe}$$

définie par $p = \sigma + j\omega$ où σ et ω sont des variables réelles et $j = \sqrt{-1}$ (ou encore $j^2 = -1$). La variable réelle t représente toujours le temps.

III L'INVERSE DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

La transformation faisant passer du domaine de la variable complexe p au domaine du temps t s'appelle inversion de la transformation de Laplace. Soit $F(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, $t > 0$. Alors la transformée inverse de Laplace de $F(p)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$L^{-1}[F(p)] = f(t) = \int_0^{\infty} F(p) e^{pt} dp$$

IV PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

1) Linéarité :

$$L[af(t)] = aF(p)$$

$$L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p)$$

2) La transformée de la dérivée :

$$\text{Si } L[f(t)] = F(p) \Rightarrow L[f'(t)] = pF(p) - f(0)$$

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

$$L\left[\frac{d^3 f(t)}{dt^3}\right] = p^3 F(p) - p^2 f(0) - p f'(0) - f''(0)$$

$$\text{Généralisation : } L\left[\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right] = p^m F(p) - p^{m-1} f(0) - p^{m-2} f'(0) - \dots f^{(m-1)}(0)$$

3) La transformée de l'intégrale :

$$\text{Si } L[f(t)] = F(p) \Rightarrow L\left[\int_0^\infty f(t) dt\right] = \frac{F(p)}{p}$$

4) Théorème de la valeur initiale :

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} pF(p) - f(0) = L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] \Rightarrow pF(p) = f(0) + L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = f(0) + \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt$$

$$\text{Quand } p \rightarrow +\infty, \text{ nous nous avons : } \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt \rightarrow 0$$

D'où le théorème de la valeur initiale s'écrit : $f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$

5) Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

6) Transformation dans le domaine complexe:

$$7) \quad L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(ap)$$

$$8) \quad L^{-1}\left[F\left(\frac{p}{a}\right)\right] = af(t)$$

$$9) \quad L[e^{-at} f(t)] = F(p+a)$$

$$10) \quad L[(-1)^n t^n f(t)] = \frac{d^n F(p)}{dp^n}$$

$$11) \quad L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^\infty F(p) dp$$

$$12) \quad L[f(t-\tau)] = e^{-p\tau} F(p)$$

$$13) \quad L^{-1}[F_1(p) + F_2(p)] = \int_0^t f_1(\tau) * f_2(t-\tau) d\tau$$

V TABLEAU ELEMENTAIRE DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

Fonction dépendant du temps	Transformée de Laplace
Impulsion unité de Dirac $\zeta(t)$	1
Echelon unité $u(t)$	$\frac{1}{p}$
Rampe unité t	$\frac{1}{p^2}$
Polynôme t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
Exponentielle e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
Onde sinus $\sin at$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$
Onde cosinus $\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$
Onde sinus amortie $e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2 + b^2}$
Onde cosinus amortie $e^{-at} \cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + b^2}$

Applications

Déterminer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

$$f_1(t) = 3e^{-t} - e^{-2t}, \quad f_2(t) = t, \quad f_3(t) = 1 - e^{2t} + \cos t, \quad f_4(t) = 2e^{-4t} \cos 3t$$

Solutions

$$L[f_1(t)] = 3L[e^{-t}] - L[e^{-2t}] = \frac{3}{p+1} - \frac{1}{p+2} = \frac{2p+5}{p^2+3p+2}$$

$$L[f_2(t)] = \int_0^{\infty} te^{-t} dt \quad du = dt \quad v = \frac{-1}{p} e^{-pt}$$

$$\Rightarrow L[f_2(t)] = \left[-\frac{t}{p} e^{-pt} \right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{p} e^{-pt} dt = \left[-\frac{t}{p} e^{-pt} - \frac{1}{p^2} e^{-pt} \right]_0^\infty = \frac{1}{p^2}$$

$$L[f_3(t)] = L[1] - L[e^{2t}] + L[\cos t] = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-2} + \frac{p}{p^2+1}$$

$$L[f_4(t)] = 2L[e^{-4t} \cos 3t] = 2 \int_0^\infty e^{-4t} \cos 3t e^{-pt} dt = 2 \frac{p+4}{(p+4)^2+9}$$

V- APPLICATION DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE A LA RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

L'application de la transformée de Laplace à la résolution d'équations différentielles est d'une grande importance dans des systèmes de commande.

Considérons l'équation suivante :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = x$$

$$\text{Avec } \begin{cases} y \rightarrow C \text{ est la fonction correspondant au Signal de sortie} \\ x \rightarrow C \text{ est la fonction correspondant au Signal d'entrée} \\ a_i \rightarrow C \text{ sont des constantes avec } i=0, 1, 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

Les conditions initiales pour cette équation sont :

$$\left. \frac{d^k y}{dt^k} \right|_{t=0} = y^k(0) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{et } y^k(0) \text{ sont des constantes.}$$

La transformée de Laplace de cette équation est donnée par :

$$\sum_{i=0}^n \left[a_i (p^i Y(p) - \sum_{k=0}^{i-1} p^{i-1-k} y^k(0)) \right] = X(p) \dots \diamond$$

D'où

$$Y(p) = \frac{X(p)}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} + \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i p^{i-1-k} y^k(0)}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \Rightarrow y(t) = L \left[\frac{X(p)}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \right] + L \left[\frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i p^{i-1-k} y^k(0)}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \right]$$

Exemple :

Soit à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = u(t) \quad \text{Echelon unité}$$

Avec les conditions initiales : $y(0) = -1, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_0 = 2$

En utilisant l'équation $\diamond$, on peut écrire :

1. Pour $i = 0, \quad k = 0, 1$ on a : $a_0 = 2 \Rightarrow \diamond = 2(p^0 Y(p) - \sum_{k=0}^{-1} p^{-1-k} y^k(0))$ mais comme k

ne prend pas de valeur négatif alors $\sum_{k=0}^{-1} \rightarrow 0 \Rightarrow \diamond = 2Y(p)$

.....1

2. Pour $i = 1$ on a : $a_1 = 3$

$$\Rightarrow \diamond = 3(p^1 Y(p) - \sum_{k=0}^0 p^{1-1-k} y^k(0)) = 3(pY(p) - p^{1-1-0} y^0(0)) = 3(pY(p) - (-1))$$

$$\Rightarrow \diamond = 3(pY(p) + 1) \dots\dots\dots 2$$

3. Pour $i = 2$ on a : $a_2 = 1$

$$\Rightarrow \diamond = 1(p^2 Y(p) - \sum_{k=0}^1 p^{2-1-k} y^k(0)) = 1(p^2 Y(p) - [p^{2-1-0} y^0(0) + p^{2-1-1} y^1(0)])$$

$$= 1(p^2 Y(p) - [p(-1) + p^0(2)]) = 1(p^2 Y(p) - (-p + 2))$$

$$\Rightarrow \diamond = 1(p^2 Y(p) + (p - 2)) \dots\dots\dots 3$$

La somme fait donc (1) + (2) + (3)

$$\Rightarrow 2Y(p) + 3(pY(p) + 1) + 1(p^2 Y(p) + p - 2) = \frac{1}{p}$$

Ceci sachant que $n = 2, \quad y(0) = -1, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_0 = 2 \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 1$ et $L[u(t)] = \frac{1}{p}$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{-(p^2 + p - 1)}{p(p^2 + 3p + 2)} = \frac{-(p^2 + p - 1)}{p(p+1)(p+2)}$$

La solution dépendant du temps $y(t)$ est la transformée de Laplace inverse de $Y(p)$. Nous allons d'abord décomposer $Y(p)$ en éléments simples :

$$Y(p) = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{p+2}$$

Par analogie, nous trouvons : $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{1}{2p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{2(p+2)}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{2p}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{2(p+2)}\right]$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}[1] - e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} = \frac{1}{2}(1 - 2e^{-t} - e^{-2t})$$

ÉPIQUE

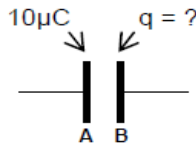
FICHE TD N°1

Exercice 1:

a) Supposant que la charge d'un condensateur est augmentée graduellement de 0 à Q , montrez que son énergie est $E_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2$

b) Donner la bonne réponse

- ✓ L'espace situé entre les armatures d'un condensateur est :
conducteur, isolant ou semi-conducteur.
- ✓ La valeur de la charge q accumule sur l'armature B du condensateur ci-contre est égale:



- ✓ Deux condensateurs $C_1 = 47\mu\text{F}$ et $C_2 = 100\mu\text{F}$ (initialement déchargés) sont associés en série et l'ensemble est soumis à une tension. On a alors à tout instant pour les tensions:
1) $V_{C1} > V_{C2}$; 2) $V_{C1} < V_{C2}$; 3) $V_{C1} = V_{C2}$.
- ✓ Un condensateur soumis à la tension $U = 10\text{V}$ présente, sur une plaque, la charge $q = 10^{-5}\text{C}$. Retrouvez la valeur de sa capacité en micro farads.

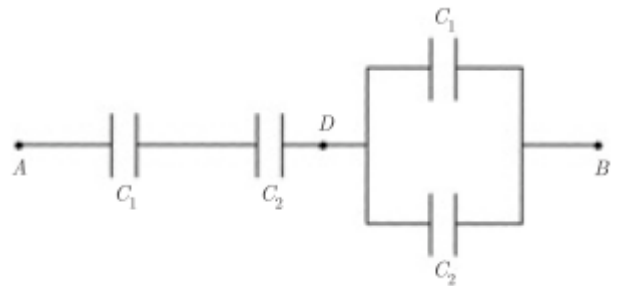
Exercice 2:

Soit le groupement de condensateurs suivant :

La capacité C_1 étant donnée, quelle doit être la capacité C_2 pour qu'il y ait entre A et B une capacité équivalente C_{eq} telle que $C_{eq} = C_2/2$?

A.N. : $C_1 = 8\mu\text{F}$

Une tension $U_{AB} = 500\text{V}$ est appliquée entre les points A et B. Calculer les tensions aux bornes de chaque condensateur ainsi que les charges qu'ils portent.



Exercice 3 :

Considérons le circuit de la figure ci-dessous (Fig.1)

1. Calculer la résistance équivalente R_{AB} entre les points **A** et **B** du circuit.
2. On relie les points **A** et **B** aux pôles d'un générateur de f. e. m. $E = 56V$ et de résistance interne négligeable. Calculer l'intensité I du courant débité par le générateur en précisant son sens de passage.
3. On se propose de calculer de façon simple le courant dans la branche **CD**.
 - a) Calculer la chute de tension V_{AC} entre les points **A** et **C**.
 - b) En déduire le courant dans la branche **CD**. Préciser son sens.
4. En procédant de la même façon qu'à la 3^{ème} question, on demande de déterminer le courant qui circule dans la branche **EF**.

Exercice 4 :

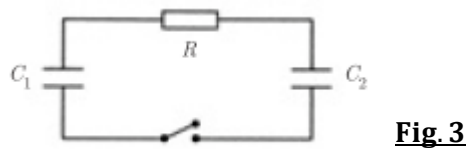
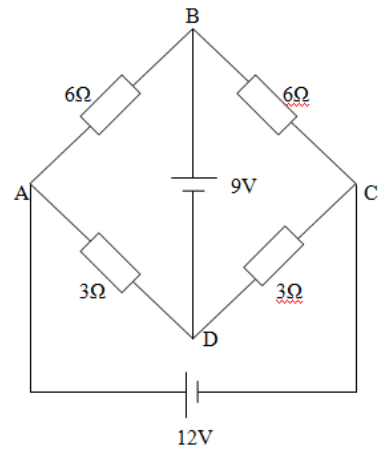
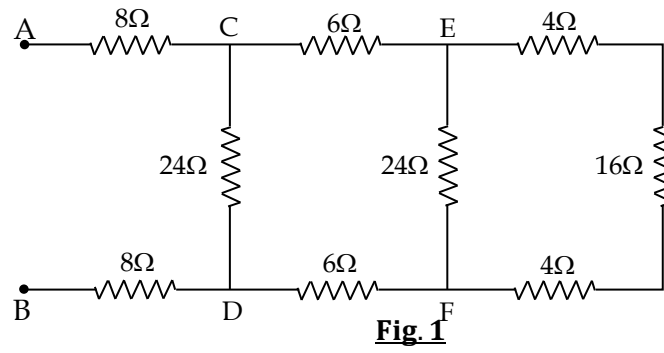
Soit le circuit de la (Fig.2)

1. Ecrire les lois de Kirchhoff pour ce circuit.
2. Calculer les intensités des courants qui circulent dans les différentes branches de circuit.

Exercice 5 :

Un condensateur de capacité C_1 (Fig.3) est chargé sous une différence de potentiel V_1 , puis isolé .

1. Donner les expressions de la charge Q_0 et de l'énergie W_0 emmagasinées dans le condensateur C_1 à la fin de l'opération.
2. On décharge le condensateur C_1 dans un condensateur C_2 , initialement neutre, à travers une résistance R . Calculer, à l'équilibre, en fonction de Q_0 , C_1 et C_2 :
 - a) les charges Q_1 et Q_2 prises par les deux condensateurs,
 - b) les différences de potentiel V'_1 et V'_2 aux bornes des deux condensateurs,
 - c) les énergies W_1 et W_2 emmagasinées dans les deux condensateurs.
3. a) Écrire la variation de q_1 en fonction du temps au cours de la décharge de C_1 dans le circuit.
 - b) En déduire l'énergie W_J dissipée par effet Joule dans la résistance R , en fonction de Q_0 , C_1 et C_2 , pendant la décharge de C_1 .
 - c) Montrer que la variation d'énergie du système entre l'état initial et l'état final correspond à l'énergie dissipée par effet Joule.



FICHE TD N°2

Question1 : Que valent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe : $5,2j - 2,5$?

Question2 : Que valent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre réel π ?

Question3 : Que valent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre imaginaire j ?

Question4 : Additionner les nombres complexes $3 - 4j$ et $3 + 4j$.

Question5 : Soustraire les nombres complexes $3 - 4j$ et $3 + 4j$.

Question6 : Multiplier les nombres complexes $1 - j$ et $4 + 2j$.

Question7 : Multiplier les nombres complexes $3 - 4j$ et $3 + 4j$.

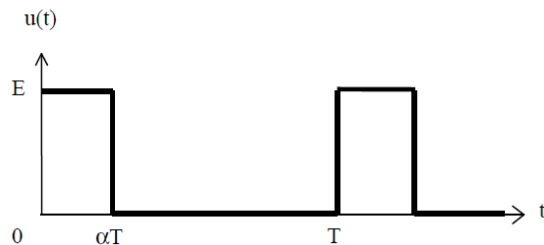
Question8 : Multiplier les nombres complexes j et $3 + 4j$.

Exercice n°1 : Retrouver l'expression de la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal périodique

Exercice 2 : Tension rectangulaire $u(t)$ est une tension de période T et de rapport cyclique a .

Calculer la valeur moyenne $\langle u \rangle$ et la valeur efficace U de la tension u .

A.N. $E = 5V$; $a = 0,5$.



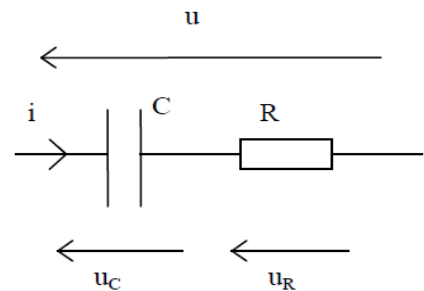
Exercice 3 : Régime sinusoïdal

1) Représentation de Fresnel :

Construire $\vec{U}_R$, $\vec{U}_C$, $\vec{U}$

En déduire l'expression de Z_{eq} ainsi que l'expression du déphasage φ de u par rapport à i .

Quelle plage de valeurs peut prendre le déphasage?



2) Utilisation des nombres complexes : Déterminer Z_{eq} .

En déduire Z_{eq} et φ .

3) Applications numériques

On donne $U = 5 \text{ V}$, $f = 10 \text{ kHz}$, $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 10 \text{ nF}$.

Calculer I , j , U_R et U_C .

Comparer U et $U_R + U_C$. Commentaires ?

Pour quelle fréquence a-t-on $U_C = U_R$?

Exercice 4 : Circuit RLC série

On associe une résistance, une bobine et un condensateur en série.

a. Donner l'expression de la partie réelle de l'impédance complexe Z .

b. La réactance X correspond à la partie imaginaire de l'impédance complexe Z .

Donner son expression.

c. L'impédance de l'association (en ohms) correspond au module de l'impédance complexe.

Donner son expression.

d. Le déphasage entre tension et courant est donné par l'argument de l'impédance complexe.

Donner son expression.

Exercice 5 : Circuit RL parallèle

On associe une résistance et une bobine en parallèle. Donner l'expression de son impédance complexe.

a. L'impédance de l'association (en ohms) correspond au module de l'impédance complexe.

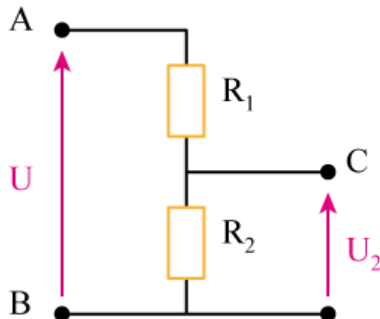
Donner son expression.

b. Le déphasage entre tension et courant est donné par l'argument de l'impédance complexe.

Donner son expression.

FICHE TD N°3

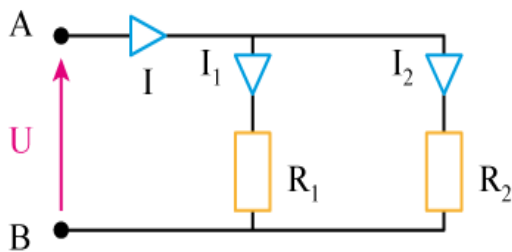
Exercice n°1 :



On applique une différence de potentiel U aux bornes d'un circuit constitué de deux résistances R_1 et R_2 associées en série.

- 1) Exprimer en fonction de U , de R_1 et de R_2 la tension U_2 existant aux bornes de la résistance R_2
- 2) Vérifier avec la loi du diviseur de courant.

Exercice 2 :



On applique une différence de potentiel U aux bornes d'un circuit constitué de deux résistances R_1 et R_2 associées en parallèle.

- 1) Exprimer en fonction de I , de G_1 et de G_2 le courant I_2 passant dans la résistance R_2
- 2) Donner le nom de la loi utilisée.

Exercice 3 :

On considère le circuit suivant :

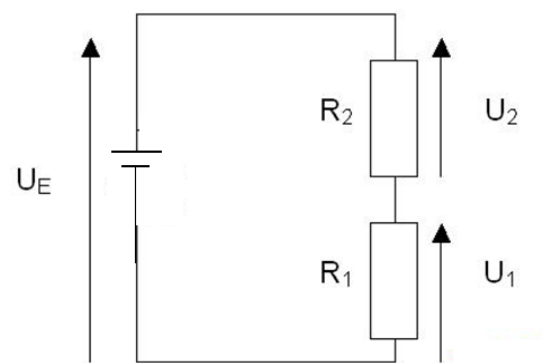
1. Etablir une relation entre les trois tensions indiquées sur le circuit.

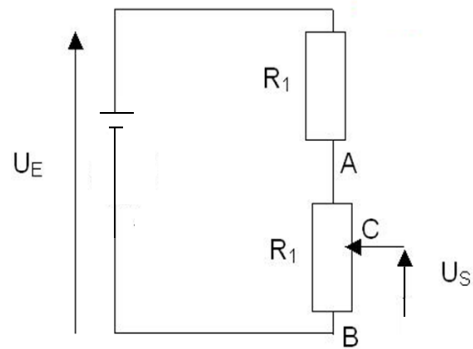
2. Soit I l'intensité constante du courant délivrée par le générateur de tension.

Exprimer la tension U_1 puis U_2 en fonction de I et R_1 ou R_2 .

3. Exprimer U_1 en fonction de U_E , R_1 et R_2 .

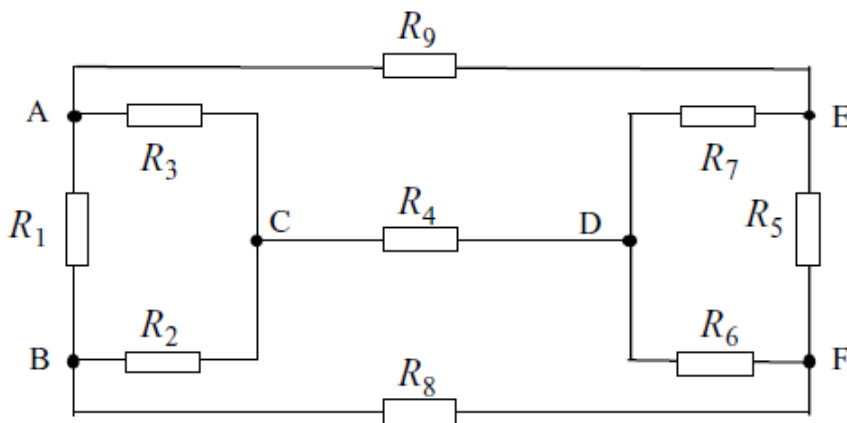
4. On désire avoir $U_1 = \frac{1}{2} U_E$. Quelle relation a-t-on alors entre R_1 et R_2 ?





5. On remplace la résistance R_1 par un potentiomètre de résistance totale R_1 . De plus $R_1=R_2$. En fonction de la position du point C, exprimer les valeurs extrêmes de la tension U_S

Exercice 4 : Soit le montage suivant :



Déterminer la résistance équivalente entre les points A et E.

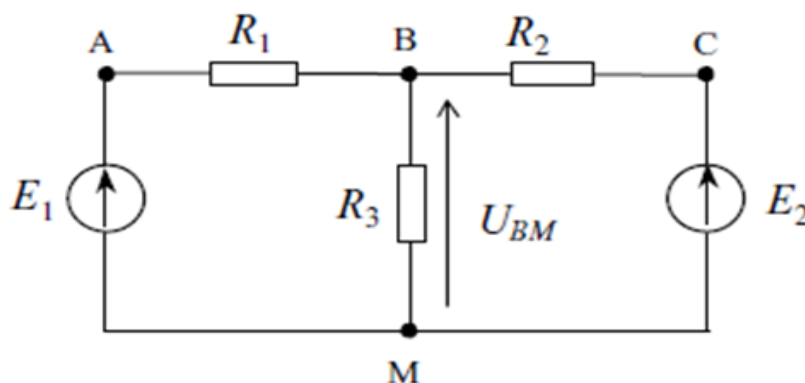
A.N : $R_1 = R_5 = 2 \text{ k}\Omega$,

$R_3 = R_7 = 3 \text{ k}\Omega$,

$R_2 = R_6 = 5 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$

$R_8 = R_9 = 8 \text{ k}\Omega$.

Exercice 5 : Soit le montage suivant :



1. Déterminer les éléments du générateur équivalent de Thévenin vu des points B et M.
En déduire les éléments du générateur équivalent de Norton.
2. En déduire la différence de potentiel U_{BM} en utilisant une autre méthode.

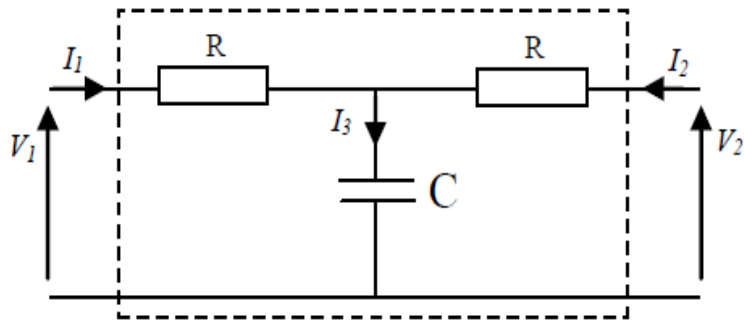
Application numérique :

$R_1 = 3 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 6 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 10 \text{ k}\Omega$, $E_1 = 20 \text{ V}$ et $E_2 = 10 \text{ V}$

FICHE TD N°4

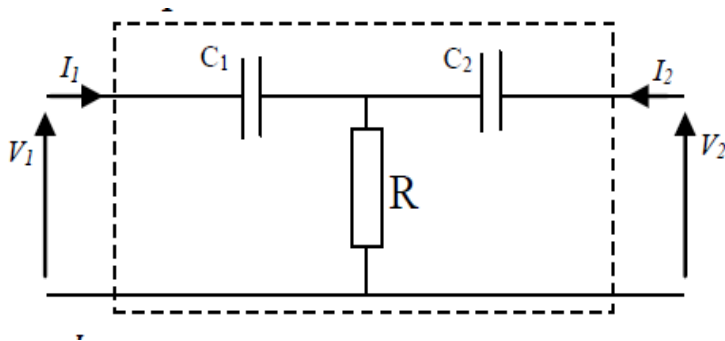
Exercice n°1 :

Trouver les paramètres Z du filtre passe-bas suivant.

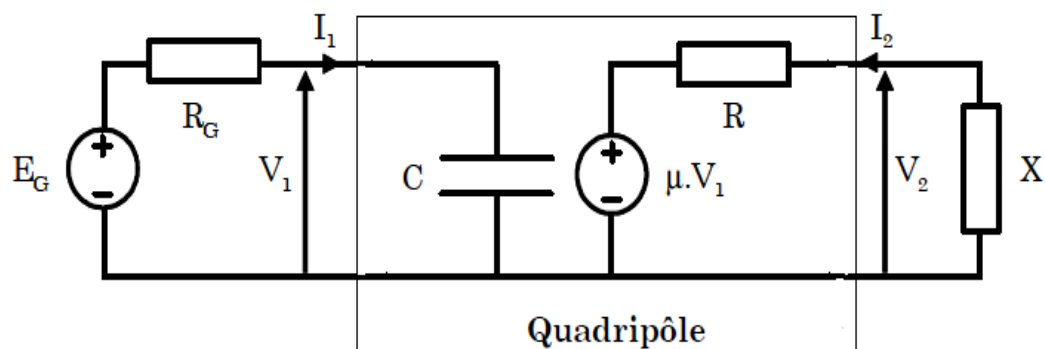


Exercice 2 :

Trouver les paramètres Y du filtre passe-haut suivant.

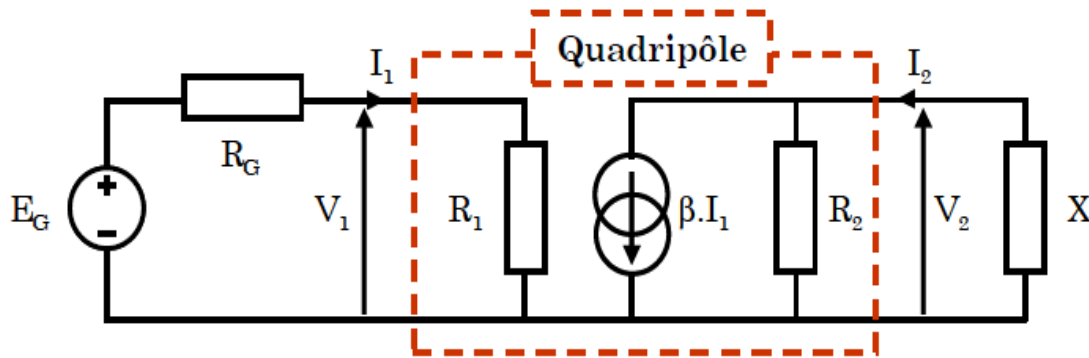


Exercice 3 :



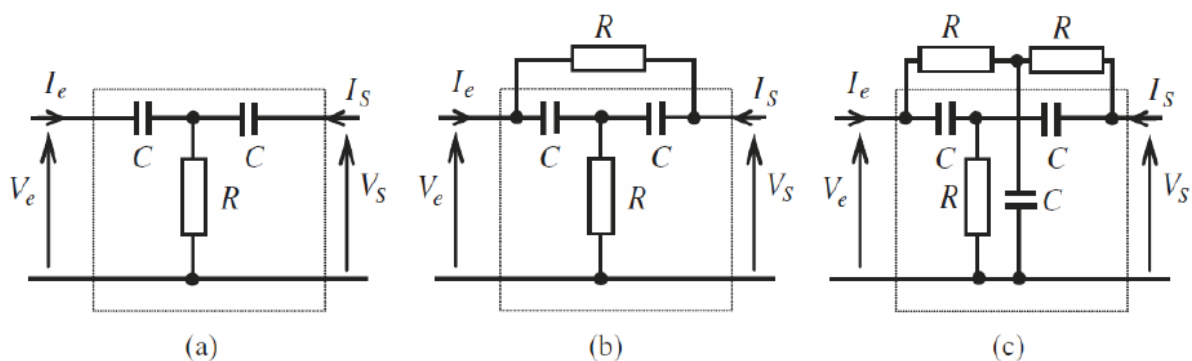
On se propose d'étudier les caractéristiques du montage de la figure ci dessus qui inclut un quadripôle constitué des éléments C , μ , V_1 et R . Par la méthode de votre choix, déterminer les paramètres impédances de ce quadripôle

Exercice 4 : Soit le montage suivant : On se propose d'étudier les caractéristiques du circuit suivant qui inclut un quadripôle constitué des éléments R_1 , β et R_2 .



- 1- Quelle est la dimension du β .
- 2- Déterminer l'expression des paramètres hybrides du quadripôle en fonction de ses éléments.
- 3- Déterminer l'expression de la résistance, R_E du quadripôle. Dire alors si la charge branchée en sortie a une influence sur la résistance d'entrée.

Exercice 5 :



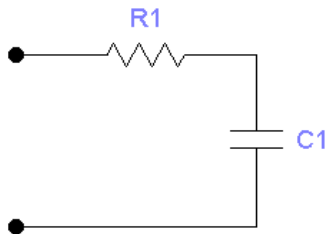
Soit les montages des quadripôles en T , en T ponté et en double T de la figure ci-dessous :

1. Déterminer la matrice admittance du quadripôle de la figure (a).
2. En déduire la matrice admittance du montage (b) et (c).

FICHE TD N°5

Exercice n°1 :

Calculer la fonction de transfert du circuit suivant.



Exercice n°2 :

Pour chacune des fonctions de Transfert en **Boucle Ouverte** suivantes, tracer les diagrammes de Bode (*asymptotes pour le gain*), et calculer la pulsation de coupure ω_{co}

(pulsation correspondant au gain unitaire) et la phase correspondante $\phi(\omega_{co})$.

$$G_1(p) = \frac{K}{p}$$

$$G_2(p) = K * p$$

$$G_3(p) = \frac{4}{1 + \frac{p}{2}}$$

$$G_4(p) = \frac{8}{1 + \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4}}$$

$$G_5(p) = \frac{4}{(1+p)(1+\frac{p}{3})^2}$$

FICHE TD N°6

Exercice n°1 :

Démontrer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

- a) Echelon unité b) Pente unité c) $\cos at$ d) $\sin at$

Exercice n°2 :

Déterminer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

a) $f_1(t) = 1 - e^{2t} + \cos t$

b) $f_2(t) = \frac{d(e^{-t})}{dt}$

c) $f_3(t) = \int_0^t e^{-t} dt$

Exercice n°3 :

Déterminer la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

a) $F_1(p) = \frac{2}{p+1} + \frac{4}{p-3}$

b) $F_2(p) = \left(\frac{p+2}{p^2+4} \right) e^{-p}$

Exercice n°4 :

Montrer que :

a) $L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0)$

b) $L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(ap)$

c) $L[e^{-at} f(t)] = F(p+a)$

Exercice n°5 :

- 1) Trouver la transformée de Laplace de $f(t) = 2e^{-t} \cos 10t - t^4 + 6e^{-(t-10)}$

- 2) Trouver la transformée de Laplace inverse de $F(p) = \frac{2e^{-\frac{1}{2}p}}{p^2 - 6p + 13} - \frac{p-1}{p^2 - 2p + 2}$

Exercice n°6 :

- a) Déterminer la transformée de Laplace $Y(p)$ du signal de sortie pour l'équation différentielle :

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 3 \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 6y = \frac{d^2 x}{dt^2} - x$$

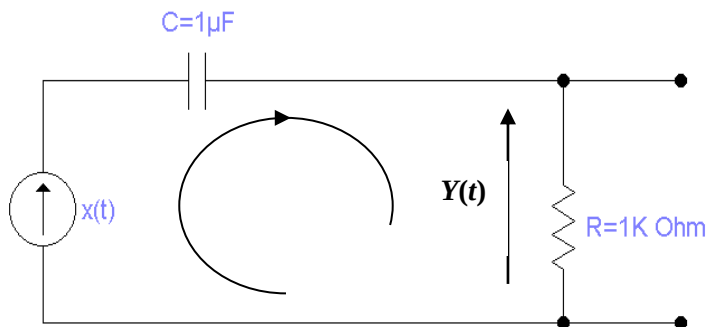
Où les conditions initiales sont : $y(0) = \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = 0$, $\frac{d^2 y}{dt^2} \Big|_{t=0} = 1$

- b) Que devient $Y(p)$ pour un signal d'entrée $x(t) = 5 \sin t$

c)

Exercice n°7 :

Pour le réseau RC du schéma suivant :



- a) Etablir une équation différentielle qui lie la tension de sortie $y(t)$ à la tension d'entrée $x(t)$.
- b) Soit $V_C(0)=1$, la tension initiale de la capacité et $x(t) = 2e^{-t}$. Trouver $y(t)$ en utilisant la méthode de la transformée de Laplace.

Exercice n°8 :

Résolution d'équations différentielles en utilisant les transformées de Laplace

- a) $\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} = \sin(t)$ avec les conditions initiales : $y(0) = 1$, $\frac{dy}{dt} \Big|_0 = 2$
- b) $\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 20y(t) = 4$ avec les conditions initiales : $y(0) = -2$, $\frac{dy}{dt} \Big|_0 = 0$

c) $\frac{d^3 y}{dt^3} + 5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} = 0$ avec les conditions initiales : $y(0) = 3, \frac{dy}{dt} \Big|_0 = -2, \frac{d^2 y}{dt^2} \Big|_0 = 7$

BIBLIOGRAPHIE

1. ELECTRICITE : Analyse des signaux et des circuits électriques, Michel Piou Baselecpro, Edition 11 Mars 2014.
2. Electricité générale, Yves Granjon, 3^{ème} édition, Edition Dunod, 2009.
3. Problèmes d'électroniques avec leurs solutions, Tome 1 : circuits à régime variable. Francis Milsant, Edition Eyrolles, 1980.
4. PTSI 2009-2010 – Correction d'exercices d'Electrocinétique E2.
5. Mini manuel d'Electrocinétique, Tamer Bécherrawy, cours et exercices, Dunod. Paris 2008.
6. Systèmes Asservis 2, cours et problèmes, série Schum, Edition Française, 1983.