Université Djillali Liabés de Sidi Bel Abbés

Faculté de Technologie

Département des EB en ST

Cours et Exercices corrigés de

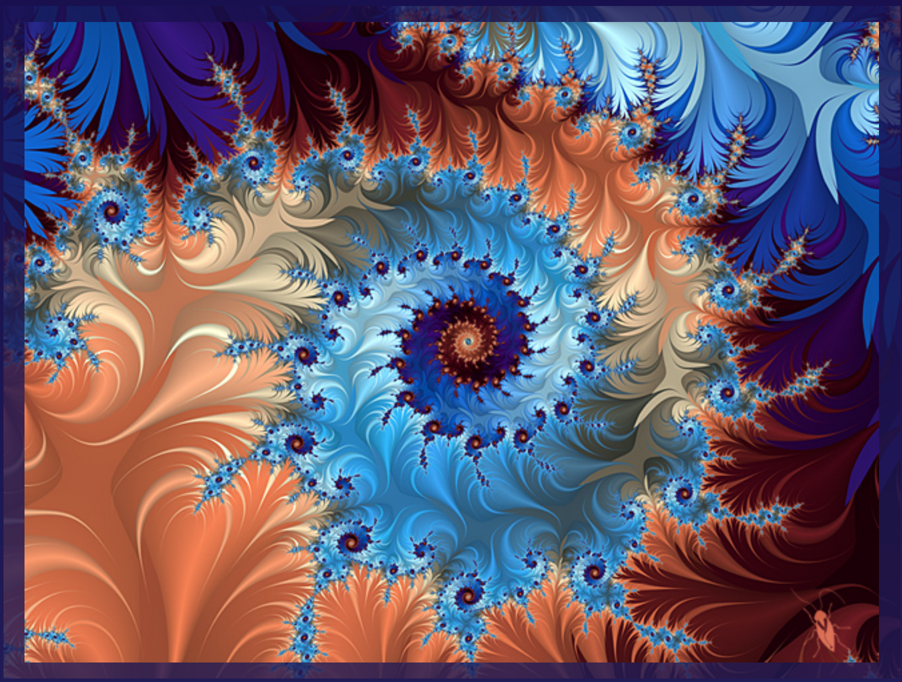
Maths3

MOKHTARI Sara

Année universitaire 2020–2021

Cours et Exercices corrigés de Maths3

MOKHTARI Sara



Sommaire

Introduction

Le présent polycopié a pour objectif de donner les outils mathématiques de base pour les différentes spécialités pour pouvoir aborder les notions essentielles pour ces étudiants de la faculté de technologie.

Le polycopié est partagé en deux parties (cours et exercices corrigés), constitués un support des séries mathématiques. On y trouve aussi de nombreux exercices corrigés, qui permettent d'une part de maitriser les différents concepts mathématiques introduits dans le cours et d'autre part d'appliquer ces concepts vers d'autres domaines.
Dans le premier chapitre , on commence de donner les notions de base des séries numériques, suivez par les séries à termes positifs et les différents critères de convergence, et on termine ce chapitre par les séries à termes quelconque avec des exemples pour bien les maitriser.

Le second chapitre est consacré en premier temps aux séries entières et aux calcul de rayon et domaine de convergence de ces séries, en deuxième sur les propriétés de continuités, dérivabilités et intégrations, et on termine par les fonctions développables en séries entières, des exemples fondamentaux sont présentés pour bien éclaircie le développement des fonctions usuelles et aussi la résolution des équations différentielles par les séries entières.

Le troisième chapitre on commence par un rappel sur le calcul d'intégral puis on traite les séries de Fourier et on définit les sériés trigonométriques et ces coefficients dans les deux cas réels et complexes. Et on termine par les fonctions développables en séries Fourier par le théorème de Dirichlet, abordée avec des différents exercices. Et le dernier chapitre est la transformation de Fourier.

Première partie

Cours

« Rien ne se perd, tout se transforme »
(Lavoisier)

Séries Numériques

I Généralités

Définition Soit une suite $(u_n)_n$ une suite de nombres réels (ou complexes), c'est à dire une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$). Considérons la somme suivantes :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{p=0}^{n} u_p.$$

La suite $(S_n)_n$ est appelée suite de somme partielles d'indice n.
La limite de $(S_n)_n$ est appelée série de terme général u_n qu'on note $\sum u_n$.

Définition Convergence On dit que $\sum u_n$ est convergente si la suite $(S_n)_n$ admet une limite finie S lorsque n tend vers $+\infty$, c'est à dire :

$$S = \lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Remarque
Si $(S_n)_n$ n'admet pas de limite, ou admet une limite infinie lorsque n tend vers $+\infty$, on dit que la série $\sum u_n$ est divergente.
Le nombre $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + ...$ est appelé le reste d'ordre n.

Exemple Étudier la nature de la série suivante : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.
On décompose u_n :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{(a+b)n + a}{n(n+1)}$$

Par identification on trouve : $a = 1$ et $b = -1$
Alors :

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

et

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p = \sum_{p=1}^{n} (\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1})$$

$$S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

et par suite

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$$

D'où, la série est convergente et sa somme égale 1.

Exemple Étudier la nature de la série suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1+\frac{1}{n}).$$

2. on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1+\frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \log(\frac{n+1}{n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\log(n+1)-\log(n))$$

On définit la suite de sa somme partielle W_n par :

$$W_n = \sum_{p=1}^{n} (\log(p+1)-\log(p))$$

$W_n = \log 2+(\log 3-\log 2)+(\log 4-\log 3)+\ldots+(\log(n)-\log(n-1))+(\log(n+1)-\log(n)) = \log(n+1)$.

Il est clair que :

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = +\infty,$$

donc la série diverge.

Proposition

(1) Si $\sum u_n$ est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(2) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, la série $\sum u_n$ est dite grossièrement divergente.

Exemples 1) $\sum_{n\geq 1} n^2$ diverge, car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

2) $\sum_{n\geq 1}(1+\frac{1}{n})$ est grossièrement divergente, car $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n}) = 1 \neq 0$.

Proposition Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques et α un scalaire non nul, alors on a :

(1) Si $\sum u_n$ converge vers s, et $\sum v_n$ converge vers l, alors la série $\sum(u_n+v_n)$ converge vers $(s+l)$.

(2) Si $\sum u_n$ converge vers s, alors $\sum(\alpha u_n)$ converge vers αs.

(3) Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum(u_n+v_n)$ diverge.

Remarque

Si les deux séries divergent, on ne peut rien dire sur la nature de leur somme.
Par exemple, les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n+1}$ divergent , et pourtant on a montrer que : $\sum u_n = \sum(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ converge.

II Séries particulières

1 Série géométrique :

Définition Soit $q \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. La série géométrique $\sum_{n\geq 0} q^n$ est convergente si et seulement si $0 < |q| < 1$, et diverge si $|q| \geq 1$.
Et sa somme partielle :

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, \ q \neq 1 \\ n+1, q = 1. \end{cases}$$

Dans le cas de convergence,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \, ; q \neq 1$$

Exemple Soit la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}, \text{ de raison } q = \frac{1}{3} < 1,$$

donc la série converge et sa somme est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

III Séries à termes positifs

Définition On dit que $\sum u_n$ est une série à termes positifs si $u_n > 0$ pour tout $n \geq N_0$, $N_0 \in \mathbb{N}$.

Proposition Une série à termes positifs $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles S_n est majorée.

1 Série de Riemann

Définition On appelle série de Riemann toute série dont le terme général est de la forme :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \, ; n \geq 1 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Donc on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si } \alpha > 1 \text{ et diverge si } \alpha \leq 1$$

Pour $\alpha = 1$,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ est appelée série harmonique divergente .}$$

Exemples 1) Les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}$ sont des séries de Riemann divergentes.

2) La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ aussi une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, qui converge.

Proposition (Règle de Riemann) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

(1) S'il existe $\alpha > 1$ et $M > 0$ tels que $n^\alpha u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum u_n$ converge.

(2) S'il existe $\alpha \leq 1$ et $m > 0$ tels que $n^\alpha u_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum u_n$ diverge.

Corollaire Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.
On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = l,(l \neq 0, l \neq \infty)$.
Alors, la série $\sum u_n$ converge Ssi $\alpha > 1$.

Exemples .1) Soit la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}, n \geq 2$$

On a :

$$n^2 u_n = \frac{e^{2\ln n}}{e^{\ln n \ln(\ln n)}} = e^{\ln(2-\ln(\ln n))},$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$, alors $\sum u_n$ est convergente puisque $\alpha = 2 > 1$.

2) Soit la série de terme général :

$$v_n = \frac{1}{(\ln n)^2}, n \geq 2$$

On a :

$$nv_n = \frac{n}{(\ln n)^2} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} nv_n = +\infty,$$

Donc la $\sum v_n$ est divergente.

2 Critère de comparaison

Théorème Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum v_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge},$$

$$\sum u_n \text{ diverge} \Longrightarrow \sum v_n \text{ diverge}.$$

Exemple Soit la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$$

On a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\frac{\cos n}{n^2}| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

et comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann converge car $\alpha = 2 > 1$,
donc d'après le critère de comparaison la série converge.

3 Critère d'équivalence

Théorème Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs. On suppose que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l; (l \neq 0, l \neq \infty).$$

Alors, les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exemple Soit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ln(1+\frac{1}{n^2}) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Et comme,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{ln(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Alors, d'après le Critère d'équivalence les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge par suite la série $\sum ln(1+\frac{1}{n^2})$ converge aussi pour tout $n \geq 1$.

4 Comparaison avec une intégrale

Théorème Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$, une application continue, décroisante et positive. On pose $u_n = f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\sum u_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ existe}$$

Exemple Vérifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

est convergente par la méthode comparaison avec une intégrale.
Soit

$$f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

On a :

$$\int_1^t f(x)dx = \int_1^t \frac{1}{x^2}dx = 1 - \frac{1}{t} \longrightarrow 1 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty,$$

donc, l'intégrale existe et fini d'où la série converge.

5 Série de Bertrand

Méthode
Soit la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Donc,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n \text{ converge si } (\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)) \text{ et diverge si } (\alpha < 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta \leq 1))$$

6 Critère d'Alembert

Méthode

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. Posons :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l \text{ alors on a :}$$

$$1) \text{ Si } l < 1 \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge ,}$$

$$2) \text{ Si } l > 1 \Longrightarrow \sum u_n \text{ diverge ,}$$

$$3) \text{ Si } l = 1, \text{ on ne peut rien dire .}$$

Exemple Soit la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$$

on calcule :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1},$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1,$$

donc, d'après le critère d'Alembert la série est convergente.

7 Critère de Cauchy

Méthode

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Posons :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = l \text{ alors on a :}$$

$$1) \text{ Si } l < 1 \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge ,}$$

$$2) \text{ Si } l > 1 \Longrightarrow \sum u_n \text{ diverge ,}$$

$$3) \text{ Si } l = 1, \text{ on ne peut rien dire .}$$

Exemple Soit la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

on calcule :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

donc, d'après le critère de Cauchy la série est convergente.

IV Séries à termes quelconques

Définition Une séries est dite à termes de signes quelconques si l'on trouve parmi ses termes des termes aussi bien positifs que négatifs.

1 Critère d'Abel

Théorème Soit $(\sum u_n)$ une série à termes quelconques, on suppose que (u_n) s'écrit sous la forme $u_n = \alpha_n.\beta_n$, avec (β_n) est strictement positif, telles que :
1. La suite $(\beta_n)_n$ est décroissante et tend vers 0, c-à-d $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = 0$.
2. Il existe $M > 0$ tel que

$$|\sum_{p=1}^{n} \alpha_p| \leq M.$$

Alors la série $(\sum u_n)$ est convergente.

Remarque
Théoriquement un peu plus général que le théorème des séries alternées, le théorème d'Abel est utilisé surtout pour des séries dont le terme général est de la forme :

$$\frac{\cos n\alpha}{n^s}, \frac{\sin n\alpha}{n^s}, (n \geq 1, 0 < s \leq 1, \alpha \in \mathbb{R}),$$

et en conséquence pour les séries à termes complexes :

$$\frac{e^{in\alpha}}{n^s}, (n \geq 1, 0 < s \leq 1, \alpha \in \mathbb{R})$$

.
En effet, les sommes partielles des séries de terme général $\frac{\cos n\alpha}{n^s}, \frac{\sin n\alpha}{n^s}$, $(n \geq 1, 0 < s \leq 1, \alpha \in \mathbb{R}$, sont respectivement les parties réelles et imaginaires des sommes partielles de la série de terme général $\frac{e^{in\alpha}}{n^s}$. Et on a

$$|\sum_{p=1}^{n} \cos(px)| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|} \text{ et } |\sum_{p=1}^{n} \sin(px)| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|} \text{ avec } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Exemple Soit la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{n},$$

posons $u_n = \cos(2n).\frac{1}{n}$, avec $\beta_n = \frac{1}{n}$ et $\alpha_n = \cos(2n)$, on applique le critère d'Abel :
1. (β_n) est décroissante car $(\beta_n)' = \frac{-1}{n^2} \leq 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = 0$.
2. Il existe $M > 0$ tel que $|\sum_{p=1}^{n} \alpha_p| \leq M$, en effet :

$$|\sum_{p=1}^{n} \cos(2p)| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{2}{2})|} = \frac{1}{|\sin(1)|}.$$

Donc, la série $\sum_n \frac{\cos(2n)}{n}$ converge.

2 Séries absolument convergentes

Définition Soit la série à termes de signes variables $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ converge.

Exemple La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}, \text{ est absolument convergente },$$

en effet :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^3} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}, \text{ qui converge }.$$

3 Séries semi-convergentes

Définition On dit que la série $\sum u_n$ est semi-convergente si $\sum u_n$ converge mais $\sum |u_n|$ diverge.

Exemple La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \text{ est semi-convergente },$$

en effet :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \text{ série harmonique divergente }.$$

et par la suite on montre que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\ , \text{ converge par le théorème de Leibnitz }.$$

4 Séries alternées

Définition On appelle une série alternée toute série de la forme :

$$\sum_{n} (-1)^n v_n \text{ tel que } v_n \geq 0\ ,\ \forall n \geq 0.$$

Théorème {**critère de Leibnitz**}
Soit une séries alternée $\sum_n (-1)^n v_n$ avec $v_n \geq 0$, telle que :
1) La suite (v_n) est décroissante,
2) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.
Alors la série $\sum_n (-1)^n v_n$ est convergente.

Exemple Étudier la nature de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}$$

1)Convergence absolue : la série converge absolument, en effet :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \text{ , converge (série de Riemann) .}$$

2)Convergence simple : Soit $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^3}} > 0, \forall n \geq 1.$

$$\text{(i) } (v_n)' = \frac{-3}{2} \frac{1}{n^{5/2}} < 0 \Rightarrow (v_n) \text{ est décroissante,}$$

$$\text{(ii) } \lim_{n \to +\infty} (v_n) = 0,$$

Donc, d'après le critère de Leibnitz la série converge.

Proposition toute série absolument convergente est convergente.

Chapitre 2

« *Rien ne se perd, tout se transforme* »
(Lavoisier)

Séries Entières

I Définition et domaine de convergence d'une séries entières

Définition Une série de la forme $\sum a_n z^n$, ou z est un nombre réel ou complexe et (a_n) une suite numérique réelle ou complexe s'appelle une série entière.
Les sommes partielles de la série entière $\sum a_n z^n$ sont les expressions polynomiales :

$$S_n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$$

Exemple 1) la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \text{ de sommes partielles :}$$

$$S_n = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!}, \text{ est une séries entière.}$$

2) De même, la série de sommes partielles :

$$S_n = z + \frac{z^3}{2} + \frac{z^5}{3} + ... + \frac{z^{2n-1}}{n} \text{ est une séries entière,}$$

ses coefficients sont définis par :

$$a_{2n} = 0 \text{ pour } n \geq 0 \text{ et } a_{2n+1} = \frac{1}{n}, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

1 Opérations sur les séries entières

1) La somme de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière associée à la suite $(a_n + b_n)_n$ tel que on a :

$$\sum a_n z^n + \sum b_n z^n = \sum (a_n + b_n) z^n.$$

2) Le produit d'une série entière $\sum a_n z^n$ par un scalaire $\alpha \in \mathbb{C}$ est la série entière à la suite (αa_n) tel que on a :

$$\alpha \sum a_n z^n = \sum (\alpha a_n) z^n.$$

3) Le produit de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entières associée à la suite (c_n), avec

$$\forall n \in \mathbb{N}; c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \text{ on a}$$

$$\left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum b_n z^n\right) = \sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

2 Domaines de convergence

On appelle domaine de convergence d'une série entière tout ensemble D tel que :

$$D = \{z \in \mathbb{C}; \sum a_n z^n \text{ converge } \}$$

Exemple

1) $\sum z^n$ est une série géométrique qui converge pour $|z| < 1$. Le domaine de convergence est donné par :

$$D = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\} = D(0,1)$$

Et pour $z \in D$ sa somme est donnée par :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\,;\, z \neq 1$$

Le domaine de convergence de la série réelle :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \text{ est } D =]-1,1[.$$

2) Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n+2}$, en utilisant le critère d'Alembert, on pose $U_n = \dfrac{z^n}{n+2}$

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{n+3}\frac{n+2}{z^n}\right| = \frac{n+2}{n+3}|z|, \text{ donc } \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = |z|.$$

Donc la série converge si : $|z| < 1$, et on a $D = D(0,1)$.

Le domaine de convergence de la série réelle : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$, est $D = [-1,1[$.

3) Soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$, en utilisant le critère d'Alembert, on pose $U_n = \dfrac{x^n}{n^2}$

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{x^n}\right| = (\frac{n}{n+1})^2|x|, \text{ donc } \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = |x|. \text{ Alors on a :}$$

1) si $|x| < 1$, la série converge absolument,
2) si $|x| > 1$, la série diverge,
3) si $|x| = 1$, on a la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$, pour tout $n \geq 1$, converge absolument.
Donc, $D = [-1,1]$.

3 Lemme d'Abel

Soit $(\sum a_n z^n)$ une série entière. On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée. Alors :
• la série $(\sum a_n z^n)$ est absolument convergente pour $|z| < |z_0|$.
Et si la série $(\sum a_n z_0^n)$ diverge, alors
• la série $(\sum a_n z^n)$ est divergente pour $|z| > |z_0|$.

II Rayon de convergence

Théorème Soit $(\sum a_n z^n)$ une série entière, alors il existe un unique nombre réel positif ou nul, ou éventuellement infini, tel que :
- $(\sum a_n z^n)$ converge absolument si $|z| < R$,
- $(\sum a_n z^n)$ diverge si $|z| > R$.

Définition Le nombre R est appelé **rayon de convergence** de la série entière, et on a

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ / (\sum |a_n| r^n) converge\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

et le disque ouvert centré en 0 de rayon R, noté $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < R\}$, est appelé disque ouvert de convergence.
Dans le cas réel, le domaine de convergence est $D_x =]-R, R[$.

1 Détermination du rayon de convergence

Lemme d'Hadamard : Soit $(\sum a_n z^n)$ une série entière. Le rayon de convergence R est donné par :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Exemples

(1) Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$, avec : $a_n = \frac{n!}{n^n}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!}\right| = \lim_{n\to+\infty} (\frac{n}{n+1})^n = \lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}) = \frac{1}{e}$$

Donc, $R = e$ et $D = D(0, e) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < e\}$

(2) Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n} x^n$, avec : $a_n = \frac{2^n}{n}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{2^{n+1}}{n+1} \frac{n}{2^n}\right| = 2\frac{n}{n+1} \longrightarrow 2 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Donc, $R = \frac{1}{2}$, $D =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

- Si $x = \frac{1}{2}$, on obtient la série harmonique qui diverge.
- Si $x = -\frac{1}{2}$, on obtient la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ qui converge par le théorème de Leibnitz.

Donc

$$D = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[.$$

(3) Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} n! z^n$, avec : $a_n = n!$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \frac{(n+1)n!}{n!} = n+1 \longrightarrow +\infty \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Donc $R = 0$, $D = \{0\}$.

III Propriétés des séries entières

1 Continuité

Proposition Soit $(\sum a_n x^n)$ une série entière de rayon de convergence R et soit $f\ :]-R,R[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \text{ alors f est continue.}$$

2 Intégration et dérivation

Proposition Soit $(\sum a_n x^n)$ une série entière de rayon de convergence $R>0$, pour tout $x\in]-R,R[$, on a :

$$\int_0^x (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Exemple 1) Considérons la série entière : $f(x)=\sum \frac{(-1)^n}{n}x^n$ pour tout $n\geq 1$, de rayon de convergence $R=1$ qu'est définie et continue sur $]-1,1]$.
Pour tout $x\in]-1,1[$, on a :

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{(-1)^n}{n}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^n)^n=\frac{-1}{1+x}.$$

2) Calculer la primitive de $\sum(-x)^n$ pour tout $n\geq 0$.
Pour tout $x\in]-1,1[$, on a :

$$\int_0^x (\sum_{n=0}^{+\infty}(-t)^n)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\ln(1+x)$$

Donc,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\ln(1+x) \text{ pour tout } x\in]-1,1[.$$

Pour $x=1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}, \text{ converge par le critère de Leibnitz, d'où par continuité : } \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2$$

IV Fonctions développables en séries entières

Puisque la dérivée d'une série entière de rayon de convergence $R>0$ est une série entière de même rayon, on peut dériver sa somme autant de fois qu'on veut sur l'intervelle $]-R,R[$, si :

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_2x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

$$f''(x)=2a_2+3.2a_3x+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots$$

D'où : $f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$, $f''(0) = 2a_2$, et $f^p(0) = p!a_p$, pour tout entier $p \geq 0$.

Théorème **La somme d'une série entière**
Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence R, est une fonction de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$; sa dérivée d'ordre p est une série entière, de même rayon de convergence, s'obtient en dérivant les termes de la série p fois, et on a

$$f^p(0) = p!a_p \text{ et } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Définition Soient $r > 0$ et f une fonction de $]-r, r[$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On dit que f est développable en série entière sur $]-r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ convergente sur $]-r, r[$ telle que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ pour tout } , x \in]-r, r[.$$

Théorème « condition suffisante » :
Si une fonction $f \in C^\infty(-r, r)$ vérifie : Il existe $M > 0$ tel que $|f^{(n)}(x)| \leq M$ pour tout $n \geq 1$ et $\forall x \in]-r, r[$, alors on a

$$\forall x \in]-r, r[: f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

et pour son rayon de convergence R on a $R \geq r$.
Lorsqu'il existe, ce développement est unique.

Proposition Soient deux fonctions développables en séries entière autour de 0 ;$f(x) = \sum a_n x^n$ et $g(x) = \sum b_n x^n$ avec rayon de convergence respectifs R_f et R_g alors :

$$1) f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n, \text{ avec } R_{f+g} \geq \min(R_f + R_g).$$

$$2) \text{ si } R_f = R_g, \text{ le rayon de convergence de la série } \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n \text{est } R_{f+g} \geq R_f$$

$$3) f(x) \times g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n_k} \right) x^n, \text{ avec } R_{fg} \geq \min(R_f + R_g).$$

Exemples fondamentaux
La formule de Taylor-Young Pour une fonction f ayant des dérivées jusqu'à l'ordre n, on a :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \varphi(x); \text{ où } \varphi(x) <<_{x \to a} (x-a)^n.$$

(1) $f(x) = e^x$ est de $C^\infty(\mathbb{R})$ et $\forall n \geq 1; f^{(n)}(x) = e^x$ est majorée sur $]-r, r[$

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots.(R = \infty)$$

(2) $f(x) = \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ est de $C^\infty(\mathbb{R})$ et toutes ses dérivées sont majorée par 1....$(R = \infty)$;
et $\cos x$ est paire donc, $a_{2n+1} = 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}; \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

(3) $f(x) = \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ est de $C^{\infty}(\mathbb{R})$ et toutes ses dérivées sont majorée par 1....($R = \infty$);
et $\sin x$ est impaire donc, $a_{2n} = 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R};\ \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ est somme de la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$;

$$\forall x \in]-1,1[;\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...$$

(5) En intégrant $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ on obtient : $\forall x \in]-1,1[;\ -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.....($R = 1$)

(6) En intégrant $f(x) = \dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$ on obtient : $\forall x \in]-1,1[;\ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.....($R = 1$)

(7) En intégrant $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n$ on a : $\forall x \in]-1,1[;$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} .....(R = 1)$$

Exercice

Donner le développement en série entière des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \text{ et } g(x) = \frac{1}{2x+1}.$$

Solution :
1) Pour $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{x-2} = \frac{-1}{2-x} = \frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}},\ \text{pour } |\frac{x}{2}| < 1 \text{ c'est à dire } |x| < 2.$$

donc on a :

$$\forall x \in]-2,2[;\ f(x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{x}{2})^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}.$$

2) De même pour $g(x) = \dfrac{1}{2x+1}$, on a :

$$g(x) = \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{1-(-2x)} \text{ pour } |2x| < 1 \text{ c'est à dire } |x| < \frac{1}{2}$$

donc on a :

$$\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[;\ g(x) = \frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (2x)^n.$$

V Applications aux équations différentielles ordinaires

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert contenant 0. Supposons que les conditions suivantes sont réalisées :

- Il existe une équation différentielle (E) et un intervalle ouvert I contenant 0, tels que la restriction de f à I soit l'unique solution de (E) vérifiant certaines conditions initiales.
- On a déterminer une série entière $(\sum a_n x^n)$ de rayon de convergence $R > 0$, dont la somme est solution de (E) sur l'intervalle $]-R, R[$ et vérifiant les mêmes conditions initiales.

On a alors :

$$\forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

La méthode consiste à déterminer les coefficients (a_n) en identifiant, les développements des fonctions figurant dans les deux membres de l'équation différentielle.

Exemples Déterminer une série entière dont la somme f prenne la valeur 1 pour $x = 0$ et soit solution de l'équation différentielle

$$y' = x + y \,;\, y(0) = 1.$$

Soit :

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ on a :}$$

$$y' = x + y \Longleftrightarrow a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} = x + 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$
$$\Longleftrightarrow a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} = 1 + (1 + a_1)x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

Par identification on trouve :

$$\begin{cases} a_1 = 1 & \text{et } 2a_2 = a_1 + 1 \Longrightarrow a_2 = 1 \\ 3a_3 = a_2 & \Longrightarrow a_3 = \dfrac{1}{3}, \\ 4a_4 = a_3 & \Longrightarrow a_4 = \dfrac{1}{4} a_3. \end{cases}$$

jusqu'à l'ordre n, on a :

$$n a_n = a_n - 1 \Longrightarrow a_n = \frac{a_n - 1}{n} \Longrightarrow a_n = \frac{1}{3.4.5\ldots n} = \frac{2}{n!}.$$

Donc,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n!} x^n \text{ avec } R = \infty.$$

Exemple Soit l'équation différentielle : $y'' + y = 0$, cherchons une solution en série entière au voisinage de $x_0 = 0 : |x| < R$.

On a :

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

En dérivant :

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1},$$

$$y''(x) = 2a_2 + 2.3a_3 x + \ldots + (n-1)na_n x^{n-2} + \ldots = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)na_n x^{n-2},$$

on remplace dans l'équation

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)na_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n] x^n = 0.$$

On déduit alors par identification que :

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n = 0 \text{ , } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$n = 0 \longrightarrow 1 \times 2a_2 + a_0 = 0 \longrightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2!},$$

$$n = 2 \longrightarrow 3 \times 4a_4 + a_2 = 0 \longrightarrow a_4 = -\frac{a_2}{3 \times 4} = +\frac{a_0}{4!},$$

on montre par récurrence que :

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{(2k)!} a_0.$$

De même :

$$n = 1 \longrightarrow 2 \times 3a_3 + a_1 = 0 \longrightarrow a_3 = -\frac{a_1}{3!},$$

$$n = 3 \longrightarrow 4 \times 5a_5 + a_3 = 0 \longrightarrow a_5 = -\frac{a_3}{4 \times 5} = +\frac{a_1}{5!}.$$

On montre par récurrence que :

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} a_1,$$

D'où en remplaçant dans y :

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{1}{2!} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 + \ldots = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}.$$

Le rayon de convergence pour chaque série est $R = \infty$.

« Rien ne se perd, tout se transforme »

(Lavoisier)

Séries de Fourier

Avant de commencer ce chapitre on va faire un rappel sur les intégrales.

I Calcul intégral

1 Définitions

Définition On appelle subdivision de $[a, b]$ une famille finie strictement croissante $\sigma = (a_k)_{k\in[0,n]}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a = a_0 < \ldots < a_n = b$.

Définition Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{k\in[0,n]}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $k \in [0, n-1]$, f est constante sur $]a_k, a_{k+1}[$.

Définition Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{k\in[0,n]}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $k \in [0, n-1]$, f est continue sur $]a_k, a_{k+1}[$ et f admet une limite à droite en a_k et à gauche en a_k.
Une telle subdivision σ est dite adaptée à f.

Théorème Soit f une fonction réelle continue par morceaux sur $[a, b]$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe des fonctions φ et ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \varphi - \psi \leq \epsilon.$$

II Intégral simple de Riemann

Définition La fonction f est dite inégrable sue $[a, b]$ au sens de Riemann, si les sommes

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})m_k \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})M_k$$

avec $(m_k \leq f(z_k) \leq M_k)$, $z_k \in]a_k, a_{k+1}[)$,
tendent vers une limite commun I quand $n \longrightarrow \infty$. Cette limite est alors appelée intégral de la fonction f sur $[a, b]$ et notée

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

la valeur de I représente l'aire située sous le graphe de f et délimitée par des abscisses et les verticales $x = a$ et $x = b$.

Théorème **(Somme de Riemann)**
Soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(t)dt.$$

Théorème Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$

III Propriétés de l'intégrale

Les fonctions f et g étant intégrables sur $[a,b]$, les principales propriétés de l'intégrale sont les suivantes :

- Pour tout point c de $[a,b]$,
$$\int_c^c f(x)\,dx = 0.$$
- Pour tout point c de $[a,b]$,
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$
- Pour tous points c et d de $[a,b]$,
$$\int_c^d f(x)\,dx = -\int_d^c f(x)\,dx.$$
- Pour tous réels λ et μ, la fontion $\lambda f+\mu g$ est intégrable sur $[a,b]$,
$$\int_a^b (\lambda f+\mu g)(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx + \mu\int_a^b g(x)\,dx.$$
- Si f est une fonction paire, pour tout intervalle $[-c,c]\subset[a,b]$, on a
$$\int_{-c}^c f(x)\,dx = 2\int_0^c f(x)\,dx.$$
- Si f est une fonction impaire, pour tout intervalle $[-c,c]\subset[a,b]$, on a
$$\int_{-c}^c f(x)\,dx = 0.$$
- L'intégrale conserve les inégalités, c'est-à- dire qui si $f\geq 0$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ ou si $f\geq g$ sur $[a,b]$, alors
$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Théorème **(de la moyenne)**
Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, alors il existe un point c de cet intervalle tel que

$$\frac{1}{b-c}\int_a^b f(x)\,dx$$

le second menbre étant nommé valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a,b]$.

IV Primitive

Définition Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, on appelle primitive d'une f toute fonction F dérivable sur I, telle que $F' = f$ pour $x \in I$. Une primitive est notée $F(x) = \int f(x)\,dx$. Toute autre primitive de f est de la forme $F + C$, où C est une constante réelle quelconque.

Théorème Soient f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ continue et $a \in I$ alors on a :

1. L'application $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est $f(x)$, elle est unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

2. Pour tout primitive F de f sur I on a :

$$\forall\ x \in I,\ \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Corollaire Toute fonction continue sur I admet au moins une primitive sur I.

V Calcul d'une intégrale définie

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)]\,dx = f(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \ \alpha \neq 1, \qquad \int \frac{dx}{x+a}\,dx = \ln|x+a| + C, \qquad \int \frac{dx}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C, \qquad \int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ \ (a > 0\ \text{ et }\ a \neq 1),$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C.$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

VI Méthodes d'intégration

1 Intégration par changement de variable

Méthode

Pour calculer l'intégrale d'une fonction f continue sur $[a, b]$, on peut faire le changement de varible $x = u(t)$ au moyen d'une fonction u de dérivée continue sur $[\alpha, \beta]$, avec $a = u(\alpha)$ et $b = u(\beta)$. La variable t est la nouvelle variable d'intégration et les bornes sont changées.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[u(t)]u'(t)\,dt.$$

2 Intégration par parties

Méthode

Si u et v sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, on obtient la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v'(x)\Big]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$$

VII Séries trigonométriques

Définition On appelle série trigonométrique, toute série de la forme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)),$$

avec : $x\in\mathbb{R}$, $\omega>0$, $a_n;b_n\in\mathbb{R}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Notons que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a la majoration

$$|a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)|<|a_n|+|b_n|.$$

et on déduit alors le résultat suivant :

Proposition Si les séries numériques $\sum|a_n|$ et $\sum|b_n|$ convergent, alors la série trigonométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)),$$

est absolument convergente pour tout $x\in\mathbb{R}$ et la fonction somme est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple On considère la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\omega x)}{n^2},\ \text{avec } a_n=\frac{1}{n^2}\text{ et } b_n=0.\text{ On a alors}$$

$$|a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)|<|a_n|+|b_n|=\frac{1}{n^2}$$

Or, $\sum\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car $\alpha=2>1$,donc, la série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\omega x)}{n^2}$ est absolument convergente sur $\mathbb{R}$.

1 Coefficients de la série trigonométrique

a Cas réel

Considérons maintenant le polynômes trigonométriques

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(a_n\cos(k\omega x)+b_n\sin(k\omega x)),$$

alors :

$$f(x)\cos(n\omega x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(a_n\cos(k\omega x)\cos(n\omega x)+b_n\sin(k\omega x)\cos(n\omega x)),$$

$$f(x)\sin(n\omega x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(a_n\cos(k\omega x)\sin(n\omega x)+b_n\sin(k\omega x)\sin(n\omega x)),$$

En intégrant et en utilisant la convergence uniforme de la série trigonométrique (1) et les relations suivantes :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos(k\omega x)\cos(n\omega x)dx=\begin{cases}0 & \text{si } n\neq k\\ \frac{\pi}{\omega} & \text{si } n=k.\end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(k\omega x)\sin(n\omega x))dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ \frac{\pi}{\omega} & \text{si } n = k. \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(k\omega x)\sin(n\omega x))dx = 0$$

on déduit alors les coefficients par les expressions suivantes :

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos(n\omega x)dx$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)dx$$

Par un changement de variable, ces cœfficients peuvent s'écrire :

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\cos(n\omega x)dx \text{ et } b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)dx, n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $\omega = 1$, cas des fonctions 2π périodique

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n\omega x)dx \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(n\omega x)dx, n \in \mathbb{N}.$$

b Cas complexe

On a d'après les relations d'Euler :

$$\cos(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} \text{ et } \sin(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$$

et en posant :

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, c_0 = \frac{a_0}{2}.$$

Donc, la série trigonométrique devient :

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}$$

est appelée forme complexe d'une série trigonométrique. Dans ce cas les coefficients sont donnés par :

$$c_n = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)e^{-in\omega x}dx = \frac{\omega}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)e^{-in\omega x}dx, n \in \mathbb{Z}$$

Définition

• Une fonction f de domaine de définition D_f est dite paire si pour tout

$$x \in D_f, -x \in D_f \text{ on a } f(x) = f(-x)$$

. • Une fonction f de domaine de définition D_f est dite impaire si pour tout

$$x \in D_f, -x \in D_f \text{ on a } f(-x) = -f(x).$$

• Si f(.) est T périodique et intégrable dans $[0, T]$, alors

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ on a } \int_0^T f(x)dx = \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx.$$

VIII Série de Fourier

Soit f une fonction périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ intégrable sur toute intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

Définition On appelle série de fourier associée à f, la série trigonométrique :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)),$$

où les coefficients sont donnés par :

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi}\int_0^T f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx, \forall n \geq 1.$$

Remarque

• Si $T = 2\pi$, la série de Fourier associée à f est donnée par :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

avec :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx\,;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \forall n \geq 1.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx, \forall n \geq 1.$$

• Si la fonction f est paire

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx\,; \forall n \geq 1$$

et

$$b_n = 0\,; \forall n \geq 1.$$

• Si la fonction f est impaire

$$a_n = 0, \forall n \geq 1$$

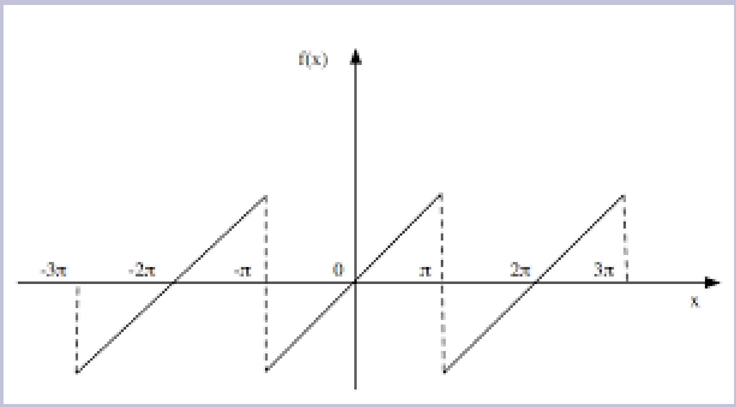
et

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \forall n \geq 1.$$

Exemple Déterminer la série de fourier associée à la fonction 2π périodique, définie par :

$$f(x) = x \text{ pour } -\pi \leq x \leq \pi.$$

1) le graphe de f :



Comme f est impaire, alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et les coefficients b_n sont donnés par :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

On fait une intégration par partie en prenant $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(nx)$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{1}{n}\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi}{n}\cos(n\pi)\right) + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx \\ &= \frac{-2}{n}(\cos(n\pi)) + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

et comme $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\sin(n\pi) = 0$,on obtient :

$$b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

D'où la série de fourier associée à f est donnée par :

$$2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

Théorème (de Dirichlet)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes (appelées conditions de Dirichlet) :
(D1) En tout point x_0 les limites de f à droite et à gauche de x_0 existent et les discontinuités de f sont en nombre fini dans tout intervalle fini.
(D2)f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Alors la série de Fourier associée à f est convergente et on a :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x\,. \end{cases}$$

Remarque

Les notations $f(x+0)$ et $f(x-0)$ représentent respectivement les limites à droite et à gauche de f au point x.

Exemple On reprend l'exemple précédent, soit f la fonction périodique ($T = 2\pi$) définie par :

$$f(x) = x \text{ pour } -\pi \leq x \leq \pi.$$

La série de Fourier associée à f converge t-elle vers f ?
On a trouvé la série de Fourier associée à f :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

Vérification des condition de Dirichlet :
• La fonction f est continue sur $]-\pi, \pi[$ et elle n'est pas continue en $-\pi$ et en π avec

$$\lim_{x \longrightarrow -\pi^-} = \pi \text{ et } \lim_{x \longrightarrow -\pi^+} = -\pi$$

nombre fini de points de discontinuité.

• fonction f est dérivable sur $]-\pi, \pi[$ et elle n'est pas dérivable en en $-\pi$ et en π car f n'est pas continue en ces points (nombre fini de points de non dérivabilité).

Ainsi, les conditions de Dirichlet sont vérifiées et donc ;

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) \text{ pour tout } x \in]-\pi, \pi[$$

Cette égalité a lieu partout sauf aux points de discontinuité. En de tels points, la somme de la série est égale à la moyenne arithmétique des limites de la fonction à gauche et à droite, c'est-à-dire 0.

Théorème (**De Jordan**) Soit f une fonction continue par morceaux, T-périodique avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

• il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ (ie f est bornée).

• On peut partager l'intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ en sous-intervalles où la restriction de f soit monotone et continue ;

alors la série de Fourier formelle de f converge en tout point $x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

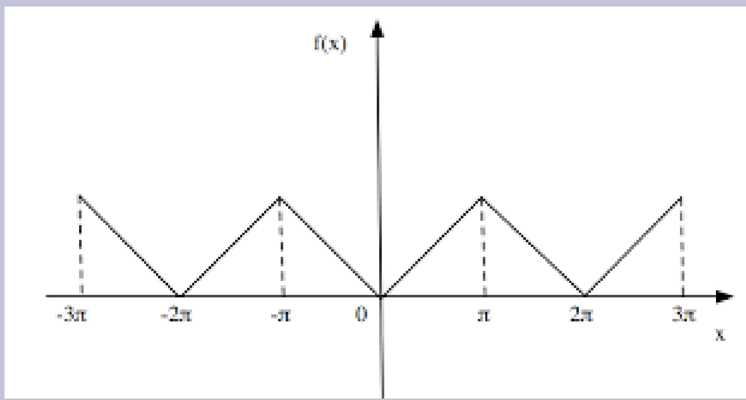
Exemple On se donne une fonction périodique de période 2π définie comme suit

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

(La fonction f est définie par $f(x) = |x|$ dans $[-\pi, \pi]$

Exemple (**suite**) :

Le graphe de f



Vérification des conditions de Jordan

1. On a $|f(x)| \leq \pi$.

2. f restreinte à $[-\pi, 0]$ est décroissante et à $[0, \pi]$ est croissante.

Donc, f vérifie les conditions de Jordan, donc développable en série de Fourier.

Calcul des coefficients

Comme f est une fonction paire alors, $b_n = 0, \forall n \geq 1$ et en intégrant :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

Et

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} [x \frac{\sin(nx)}{n}]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}(0 + [\frac{\cos(nx)}{n^2}]_0^{\pi}) = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

D'où

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \dfrac{-4}{\pi(2n+1)^2} & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

Alors le développement en série de Fourier est :

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{(2n+1)^2} ....(1)$$

En posant dans l'égalité (1) obtenue $x = 0$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

D'autre part, comme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{P=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

On a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8}$$

1 Égalité de Parseval

Théorème

Soit une fonction, T-périodique avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$, développable en série de Fourier , alors on a pour α réel quelconque

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{\omega}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(x)dx = 2\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}\ , c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Remarque

- Si f est de période 2π, on a

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

- Si f est paire $\Longrightarrow f^2$ est paire, alors on a :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f^2(x)dx$$

- Si f est impaire $\Longrightarrow f^2$ est paire, alors on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f^2(x)dx$$

Exemple En reprend le même exemple, calculer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$$

On applique l'égalité de Parseval avec :

$$a_0 = \pi \text{ et } a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \dfrac{-4}{\pi(2n+1)^2} & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

et comme f est une fonction paire, on a :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f^2(x)dx$$

$$\frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{3}\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Donc,

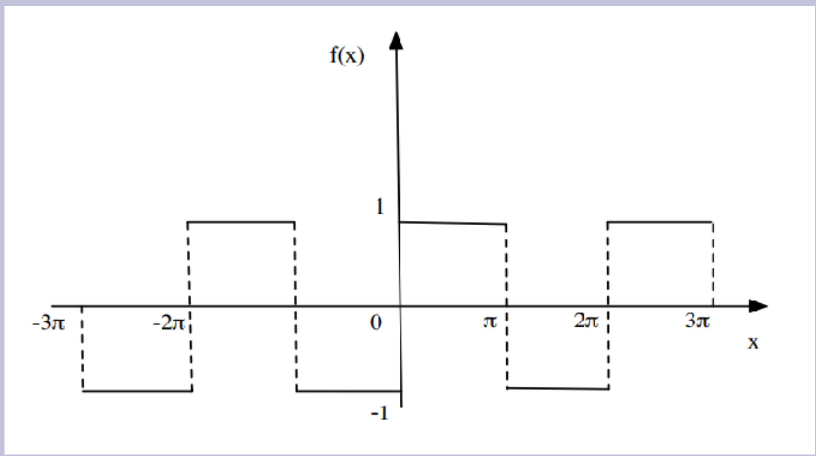
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Exemple On considère la fonction périodique de période 2π définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[. \end{cases}$$

Cette fonction est monotone par morceaux et bornée, C'est une fonction impaire, donc, $a_0 = 0$ et $a_n = 0$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$

Le graphe de f :



De plus,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx = \frac{-2}{n\pi}[\cos(nx)]_0^{\pi} = \frac{-2}{n\pi}((-1)^n - 1)$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \dfrac{4}{n\pi} & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

La série de Fourier associée est

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou si } x = \pi. \end{cases}$$

Remarque

Le développement précédent permet d'obtenir quelques formules de sommation. Ainsi, pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient :

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)},$$

D'où,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}.$$

et appliquons l'égalité de Parseval :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)dx = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

On déduit que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

« Rien ne se perd, tout se transforme »

(Lavoisier)

La transformation de Fourier

I Intégrale de Fourier

Soit $f(x)$ une fonction défine sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, absolument convergente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx = M < \infty,$$

et f développable en série de Fourier sur l'intervalle $[-l, +l]$. Alors :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Avec :

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(t)\cos(\frac{n\pi}{l}t)dt \text{ et } b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(t)\sin(\frac{n\pi}{l}t)dt.$$

En substituant les coefficients a_n et b_n dans le developpement en série de Fourier de $f(x)$ on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}[\int_{-l}^{+l} f(t)(\cos\frac{n\pi}{l}x.\cos\frac{n\pi}{l}t + \sin\frac{n\pi}{l}x.\sin\frac{n\pi}{l}t)]dt$$

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}[\int_{-l}^{+l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)dt],$$

on pose $\alpha_1 = \frac{\pi}{l}$, $\alpha_2 = \frac{2\pi}{l}$,...,$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$ et $\Delta\alpha_n = \frac{\pi}{l}$

il vient :

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{+l} f(t)\cos(\alpha_n(t-x)).\Delta\alpha_n dt,$$

En faisant tendre l vers l'infini, nous aurons :

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(t)dt \longrightarrow 0,$$

car $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente.

On admettra d'autre part :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{+l} f(t)\cos(\alpha_n(t-x)).\Delta\alpha_n dt \text{ tend vers } \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)dtd\alpha.$$

Il en résulte que :

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)dtd\alpha.$$

Cette dernière quantité est **l'intégrale de Fourier**.

1 Autre forme de l'intégrale de Fourier

En développant $\cos(t - x)$ et en le remplaçant dans l'intégrale de Fourier :

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \{[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\alpha t)dt]\cos \alpha x + [\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\alpha t)dt]\sin \alpha x\}d\alpha$$

Posant : $A(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\alpha t)dt$ et $B(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\alpha t)dt$

Il vient

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \{A(\alpha)\cos \alpha x + B(\alpha)\sin \alpha x\}d\alpha$$

II Forme complexe de l'intégrale de Fourier

On remarque que la fonction de α définie par l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(t - x)dt$$

est paire soit :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos \alpha(t - x)dt\Big)d\alpha.$$

Par ailleurs, la fonction du paramètre α définie par l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(t - x)dt$$

est impaire et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin \alpha(t - x)dtd\alpha = 0.$$

En conséquence :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\alpha(t-x)}dt\Big)d\alpha.$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\alpha t}dt\Big)e^{-i\alpha x}d\alpha.$$

Intégrale de Fourier sous forme complexe.

III Transformation de Fourier

Posons :

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\alpha t}dt : \text{ Formule directe}$$

Alors :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha : \text{ Formule Inverse}$$

Définition la fonction $F(\alpha)$ est appelée **transformation de Fourier** de la fonction $f(x)$. On note

$$f(x) \rightleftharpoons F(\alpha)$$

Cas particulier

- Si $f(x)$ est une fonction paire, alors $B(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\alpha t)dt = 0$,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\alpha t)dt\Big)\cos(\alpha x)d\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty} f(t)\cos(\alpha t)dt\Big)\cos(\alpha x)d\alpha.$$

on pose :

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)\cos(\alpha t)dt : \text{ Formule directe : cosinus transformation de Fourier}$$

Alors :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha : \text{ Formule Inverse cosinus transformation}$$

• Si $f(x)$ est impaire, alors $A(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\alpha t)dt = 0$
on pose :

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)\sin(\alpha t)dt : \text{ Formule directe : cosinus transformation de Fourier}$$

Alors :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(\alpha)\sin(\alpha x)d\alpha : \text{ Formule Inverse cosinus transformation}$$

1 Propriètés de la transformée de Fourier

Après avoir montrer l'existence de la transformée de Fourier, nous pouvons dire que toutes les fonctions existant physiquement auront une transformée de Fourier.

Iversion

Si

$$F(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt,$$

alors

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)e^{2i\pi\nu t}dt$$

Linéarité

si $f(t) \rightleftharpoons F(\nu)$ et $g(t) \rightleftharpoons G(\nu)$, alors :

$$af(t) + bg(t) \rightleftharpoons aF(\nu) + bG(\nu) \text{ où } a, b \text{ deux scalaires.}$$

Similitude

si $f(t) \rightleftharpoons F(\nu)$, alors

$$f(at) \rightleftharpoons \frac{1}{|a|}F(\frac{\nu}{a}).$$

On remarque que si t représente le temps, ν la fréquence ; alors un étalement de l'echelle des temps conduit à une contraction de l'echelle des fréquences et inversement.

Translation

si $f(t) \rightleftharpoons F(\nu)$, alors

$$f(t-a) \rightleftharpoons F(\nu)e^{-2i\pi a\nu}$$

On remarque que les transformée de Fourier de $f(t)$ et de $f(t-a)$ ont même module, mais la transformée de $f(t-a)$ subit une rotation de phase supplementaire de $2\pi a\nu$. Cette propriètè de translation est réciproque.

$$F(\nu) \rightleftharpoons f(t) \text{ alors } F(\nu - a) \rightleftharpoons f(t)e^{2i\pi at}$$

Dérivation

si $f(t) \rightleftharpoons F(\nu)$, alors

$$\frac{df(t)}{dt} \rightleftharpoons 2\pi i\nu F(\nu)$$

et

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \rightleftharpoons (2\pi i\nu)^n F(\nu).$$

De même : $(-2i\pi t)f(t) \rightleftharpoons \dfrac{dF(\nu)}{d\nu}$; $(-2i\pi t)^n f(t) \rightleftharpoons \dfrac{d^n F(\nu)}{d\nu^n}$.

Convolution

On appelle produit de convolution de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du$$

Propriètè du produit de convolution
Le produit de convolution de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ a pour transformée de Fourier le produit des transformées de Fourier de ces deux fonctions autrement dit :
si $f(t) \rightleftharpoons F(\nu)$ et $g(t) \rightleftharpoons G(\nu)$, alors

$$f(t) * g(t) \rightleftharpoons F(\nu).G(\nu)$$

Théorème de Parseval

Soient $f(t) \rightleftharpoons F(\nu)$ et $g(t) \rightleftharpoons G(\nu)$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).g^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)G(\nu)d\nu$$

où $g^*(t)$ étant le complexe conjugué de $g(t)$
et $G^*(\nu)$ étant le complexe conjugué de $G(\nu)$

Car $g(t)$ peut s'écrire : $g(t) = a(t) + ib(t)$ où $a(t)$ et $b(t)$ sont deux fonctions réelles; et on définit la puissance instantannée par :

$$P = [a(t) + ib(t)][a(t) - ib(t)] = a^2(t) + b^2(t) = g(t).\overline{g(t)},$$

on note donc $\overline{g(t)}$ par $g^*(t)$

Remarque

Ce théorème est capital dans le traitement du signal, car il permet de mesuser l'énergie de la même manière que l'on considère la représentation temps ou la représentation fréquence.
En particulier,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).f^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)F(\nu)d\nu$$

ou bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Par exemple, en physique si $f(t)$ représente une onde, ou une vibration quelconque et si $F(\nu)$ est sa transformée de Fourier, ces deux intégrales représentent l'énergie totale de vibration.

Exercice 01

Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\cos(xt)dt$ et on déduit la valeur de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$.

Solution :
Nous remarquons que $e^{-|t|}$ est une fonction paire. Si on pose :

$$J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\cos(xt)dt;$$

alors $J(x)$ est la transformée de Fourier de $e^{-|t|}$, et on aura

$$J_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)dt \text{ cosinus transformation },$$

une double intégration par partie de $J_c(x)$ nous donne :

$$J_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+x^2},$$

et

$$f(t) = e^{-t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos(xt)}{1+x^2}dx, \text{ donc}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-t},$$

et pour $t = 0$, on retrouve : $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

Exercice 02

Résoudre l'équation intégrale

$$\int_0^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)dx = \begin{cases} 1-\alpha & \text{si } 0 \leq \alpha < 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

dans laquelle $f(x)$ est la fonction inconnue.

Solution :
Soit $F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)dx$.
Alors,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_c(x)\cos(\alpha x)d\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{1}(1-\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha$$

Une intégration par parties de $f(x)$ nous donne :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}(1-\cos x)$$

Deuxième partie

Series d’exercices

Exercices

IV Séries Numériques

01 Vérifier si les sommes suivantes sont finies.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n}\,; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n-2}}\,; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(e-1)^n}\,; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Correction page 43

02 Étudier la nature des séries suivantes :

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi + \frac{1}{n})\,;\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi + \frac{1}{n})$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{2+n^\alpha}{1+n^\alpha})\,;\ 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}-n}.$$

Correction page 43

03 a)Étudier la nature des séries de termes généraux :

$$1)\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}\,;\quad 2)\sin(\frac{1}{n^2})\,;\quad 3)\frac{n!}{n^n}$$

$$4)\frac{1}{n}\ln n.\ln(1+\frac{1}{n})\,;\quad 5)\frac{1}{n.\sqrt[n]{n}}\,;\quad 6)(\frac{n}{n+1})^{n^2}$$

Correction page 44

04 4 Étudier la nature de la série de terme positifs u_n vérifiant à partir d'un certain rang :

$$\sqrt[n]{u_n} \leq 1 - \frac{1}{n^\alpha} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} : 0 < \alpha < 1.$$

Correction page 45

05 Étudier la nature des séries suivantes :

$$u_n = (\ln \frac{1}{\cos \frac{1}{n}})^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\,;\ v_n = (\frac{n^2+1}{(n+1)^2})^{n^2}\,;\ h_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1\,;\ f_n = \sin(\frac{n^2+1}{n}\pi)$$

Correction page 46

V Séries Entières

06 Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $U_n(x) = x^n \ln n$.
2. $U_n(x) = \left(\dfrac{nx}{n+1}\right)^n$.

Correction page 47

07 Déterminer le rayon de convergence des séries entières $(\sum a_n x^n)$ suivantes :

$$a_n = (\ln n)^n, \quad a_n = (\sqrt{n})^n, \quad a_n = \frac{n^n}{n!}, \quad a_n = e^{n^{\frac{1}{3}}}$$

Correction page 48

08 Déterminer le rayon de convergence R des séries entières réelles $(\sum a_n x^n)$ suivantes, puis calculer leurs sommes sur $]-R, R[$.

$$a_n = n, \quad a_n = n(n-1), \quad a_n = n^2.$$

Correction page 48

09 Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-3n+2}{2^n}$$

Correction page 49

10 Calculer le développement en série entière en zéro des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}, \quad g(x) = \ln(x^2-5x+6), \quad h(x) = \int_0^x \cos t^2 dt.$$

Correction page 50

11 6 Calculer sous forme série :

$$I = \int_0^{\infty} \ln(1+e^{-x})dx$$

et déduire sa valeur sachant que $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Correction page 50

12 7 Résoudre l'équation différentielle suivante ; en utilisant les séries entières :

$$\begin{cases} y'' - xy = & 0 \\ y(0) = 1, & y'(0) = 0, \end{cases}$$

Correction page 51

VI Séries de Fourier

13

1. Montrer que si f est impaire sur $[-a, a]$ avec $a > 0$ alors :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

2. Montrer que si f est paire sur $[-a, a]$, alors :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

3. Montrer que si f est continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T, alors :

$$\int_{0}^{T} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx,\ \forall\,\alpha \in \mathbb{R}.$$

4. Déduire que : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)\,dx}{1+(\cos(2x))^7} = 0.$

Correction page 51

14 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction périodique, définie par

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 2 \end{cases} \quad \text{avec } f(x+4) = f(x)$$

1) Développer la fonction f en série de Fourier.
2) Calculer la somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Correction page 52

15 1)Développer en série de Fourier la fonction de période 2π définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

2) Déduire du développement obtenu la valeur de la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Correction page 53

16 1) Montrer que la fonction de période 2π, définie dans $[-\pi, \pi[$ par

$$f(x) = x^2 - \pi^2$$

est développable en série de Fourier et déterminer cette série.
2) En déduire la valeurs des séries numériques :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Correction page 54

17 Montrer que la fonction f de période 2π, définie dans $[0, 2\pi[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\pi}{2} & \text{si } x \in]0, 2\pi[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est développable en série de Fourier et déterminer cette série.

Correction page 55

VII Les transformations de Fourier

18 Trouver les transformations de Fourier des fonctions définies par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{avec } g(-x) = -g(x).$$

Correction page 56

19 Calculer cosinus et sinus transformation de Fourier de la fonction $f(x)$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\beta x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{avec } \beta > 0.$$

Correction page 56

20 1. Trouver la transformée de Fourier de la fonction $f(t)$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{avec } a > 0.$$

Écrire la formule réciproque.

2. Déduire du résultat obtenu le T.F de $\dfrac{1}{(a+i\alpha)^2}$. On procedera successivement de deux façons differentes :

a. On considérera $\dfrac{1}{(a+i\alpha)^2}$ comme un produit de deux fonctions et on utilisera le produit de convolution.

b. On utilisera les formules de dérivation de la transformée de Fourier.

Correction page 56

Troisième partie

Correction des series d’exercices

01 On a :

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{5})^n,$$

est une série géométrique de raison $0 < q = \frac{1}{5} < 1$ donc converge . et sa somme est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{5})^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}.$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n-2}} = 9 \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^n,$$

est une série géométrique de raison $0 < q = \frac{2}{3} < 1$, donc converge. et sa somme est donnée par :

$$9 \times \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^n = \frac{9}{1 - \frac{2}{3}} = 27.$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(e-1)^n} \text{ on a } \sum_{n=0}^{\infty} |\frac{(-1)^n}{(e-1)^n}| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(e-1)^n},$$

aussi une série géométrique de raison ,

$$0 < q = \frac{1}{e-1} < 1$$

, donc , elle converge absolument.

4. Soit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} ; \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

on décompose : $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}\Big),$

et pour chaque entier $n \geq 1$, posons $s_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$. On a :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} u_n = \frac{1}{2}\Big(\sum_{p=1}^{n} (\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}) - 2 \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p+1} \Big)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\Big(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} + \sum_{p=3}^{n+2} \frac{1}{p} - 2 \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p} \Big)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\Big(s_n - 2(s_n - 1) + s_n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \Big)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \Big)$$

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{4}$, d'où la série est convergente et admet pour somme $\frac{1}{4}$.

02 Nature des séries :

1. Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(\pi + \frac{1}{n})$,

$$\lim_{n\to+\infty} \cos(\pi + \frac{1}{n}) = \cos(\pi) = -1 \neq 0,$$

donc la série est grossièrement divergente.

2. Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\pi + \frac{1}{n})$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(\pi + \frac{1}{n}) = 0,$$

on ne peut rien dire sur la nature de cette série.

On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$, on applique le critère d'équivalence on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{n})$ est équiavalente à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ série harmonique divergente, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{n})$ diverge aussi.

3. Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{2+n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Cas1. Si $\alpha = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2+n^\alpha}{1+n^\alpha}\right) = \ln(\frac{3}{2}) \Longrightarrow$ la série diverge.

Cas2. Si $\alpha < 0$, $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2+n^\alpha}{1+n^\alpha}\right) = \ln(2) \Longrightarrow$ la série diverge.

Cas3. Si $\alpha > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2+n^\alpha}{1+n^\alpha}\right) = 0 \Longrightarrow$ On ne peut rien dire sur la nature de cette série.

On a $\ln\left(\frac{2+n^\alpha}{1+n^\alpha}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{1+n^\alpha}\right)$, avec $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{1+n^\alpha}\right)}{\frac{1}{1+n^\alpha}} = 1$.

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{2+n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)$ est équivalente à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^\alpha} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Si $0 < \alpha \leq 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ la série diverge, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{2+n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)$ diverge aussi.

Si $\alpha > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ la série converge, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{2+n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)$ converge aussi.

4. Soit

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n^3} - n} \sim \sum \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ série de Riemann avec } \alpha = \frac{3}{2} > 1,$$

donc, la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n^3} - n}$ converge.

03

1. Soit la série à termes positifs $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$, on applique le critère d'Alembert :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \times \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}},$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0 < 1$, d'après le critère d'Alembert la série est convergente.

2. Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{n^2})$, on utilise le critère d'équivalence :

On a , $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{n^2}) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ qui converge(série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$),

donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{n^2})$ converge aussi.

3. Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$, on applique le critère d'Alembert :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = (\frac{n}{n+1})^n = \Big(\frac{n}{n(1+\frac{1}{n})}\Big)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

donc la série converge.

4. Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \ln n \ln(1+\frac{1}{n})$, on a $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ donc,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \ln n \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(\ln n)^{-1}},$$

est la série de Bertrand qui converge car $\alpha = 2 > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

5. Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0$, alors on a :

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{n}.e^{-\frac{\log n}{n}} \sim \frac{1}{n}.$$

Par suite la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ est divergente.

6. Soit la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$, on applique le critère de Cauchy :

$$\sqrt[n]{|U_n|} = \sqrt[n]{|(\frac{n}{n+1})^{n^2}|} = (\frac{n}{n+1})^n = (\frac{n}{n(1+\frac{1}{n})})^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|U_n|} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Donc, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$ est convergente.

04 On a : $\sqrt[n]{u_n} \leq 1 - \frac{1}{n^\alpha}$, alors $u_n \leq (1 - \frac{1}{n^\alpha})^n$.

Posons : $v_n = (1 - \frac{1}{n^\alpha})^n$ et étudions la série de terme général $n^2 v_n$.

$$\log(n^2 v_n) = 2\log n + n\log(1 - \frac{1}{n^\alpha}) \sim 2\log n - n^{1-\alpha}$$

Sachant que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^{1-\alpha}} = 0$, on déduit :

$$\log(n^2 v_n) \sim_\infty -n^{1-\alpha}.$$

Par conséquent, pour n assez grand, on peut écrire :

$$\log(n^2 v_n) < 0 \text{ ou } n^2 v_n < 1.$$

C'est-à-dire $v_n < \frac{1}{n^2}$, pour n assez grand. Par suite, la série $\sum v_n$ est convergente et d'après le critère de comparaison la série $\sum u_n$ converge aussi.

05

1. Soit la série alternée : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}$

Convergence Absolue :

$$\sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

qui converge(série de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1,$)donc elle converge absolument.

Convergence simple : on utilise le critère de Leibnitz en posant $v_n = \frac{1}{\sqrt{n^3}}$

la suite (v_n) est décroissante et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc d'après le critère de Leibnitz la série est convergente.

2. Soit $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos^2 n}{\sqrt{n}}$ et comme $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$, on a :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos^2 n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente (série de Riemann $\alpha = \frac{1}{2} < 1$), alors que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$ est convergente d'après le critère d'Abel, en effet :

Posons : $\beta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une suite décroissante et $\lim_{n\to+\infty} (\beta_n) = 0$,

et il existe $M > 0$ tel que : $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{|\sin 1|} = M$

Par suite, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos^2 n}{\sqrt{n}}$ est divergente.

(la somme d'une série divergente + série convergente =divergente).

3. Soit la série alternée : $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \ln(\frac{n+1}{n-1})$, posons $v_n = \ln(\frac{n+1}{n-1})$ et on vérifie les conditions de Leibnitz :

1. $\lim_{n\to+\infty} (v_n) = \lim_{n\to+\infty} \ln(\frac{n+1}{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} \ln(\frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(1-\frac{1}{n})}) = 0,$

2. $(v_n)' = \frac{-2}{(n-1)(n+1)} \leq 0 \Longrightarrow (v_n)$ est décroissante.

alors d'après le critère de Leibnitz la série est convergente.

4. Soit la série alternée : $\sum_{n\geq 1} (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, on a :

$$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

la suite (v_n) est décroissante et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors d'après le critère de Leibnitz la série est convergente.

06

1. Soit $U_n(x) = x^n \ln n$ et $U_n(x) = \left(\frac{nx}{n+1}\right)^n$ on calcule :

1. $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = |x|\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = |x|\frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}.$

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = |x|\left(1 + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right) \sim |x|, \quad n \to \infty$$

Si $|x| < 1$ la série est convergente.
Si $|x| > 1$ la série est divergente.
Si $|x| = 1$ la série diverge.

2. $\sqrt[n]{|U_n|} = \frac{n|x|}{n+1}.$

Si $|x| < 1$ la série est convergente.
Si $|x| > 1$ la série est divergente.
Si $|x| = 1$; $|U_n| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ a pour limite $\frac{1}{e}$, terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge.

07

1. Puisque $\sqrt[n]{|a_n|} = \ln n$ lorsque $n \to \infty$, la règle d'Hadamard implique que $R = 0$.
2. Puisque $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{n}$ lorsque $n \to \infty$, la règle d'Hadamard implique que $R = 0$.
3. Puisque $\sqrt[n]{|a_n|} = e^{n^{\frac{1}{3}} n^{-n}} = e^{n^{\frac{-2}{3}}} \to 1$ lorsque $n \to \infty$, la règle d'Hadamard implique que $R = 1$.
4. On a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e, \text{ lorsque } n \to \infty$$

Donc $R = \frac{1}{e}$.

08

1. On a ;
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{n} \longrightarrow 1, \text{ donc } R = 1.$$
Calculons la somme :
$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2},$$
où la deuxième égalité s'explique par le fait que $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ est la dérivée de
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in]-1, 1[.$$

2. On a ;
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)n}{n(n-1)} \longrightarrow 1, \text{ donc } R = 1.$$
Calculons la somme :
$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n = x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$
où la deuxième égalité s'explique par le fait que $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$ est la dérivée seconde de
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in]-1, 1[.$$

3. On a ;
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} \longrightarrow 1, \text{ donc } R = 1.$$
puis, d'après ce qui précède,
$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (n(n-1)+n)\,x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \\
&= \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x^2+x}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

09

1) D'aprés l'exercice (3), on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{x}{(1-x)^2}, \text{ avec } x = \frac{1}{2}, \text{ donc } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2.$$

2) D'aprés l'exercice (3), on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}, \text{ avec } x = \frac{1}{2}, \text{ donc } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6.$$

3) On a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-3n+2}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} - 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 6 - 3.2 + 2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-1} = 4.$$

10

1. La décomposition en éléments simples donne :

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{1-x} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

2. On a :

$$x^2-5x+6 = (x-2)(x-3) = 6\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right),$$

donc

$$\begin{aligned}
g(x) &= \ln(x^2-5x+6) \\
&= \ln 6 + \ln\left(1-\frac{x}{2}\right) + \ln\left(1-\frac{x}{3}\right) \\
&= \ln 6 + \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{1}{1-t}dt + \int_0^{\frac{x}{3}} \frac{1}{1-t}dt \\
&= \ln 6 + \int_0^{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt + \int_0^{\frac{x}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt \\
&= \ln 6 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^{n+1}}{n+1} \\
&= \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n}.
\end{aligned}$$

3. On a, avec un rayon de convergence infini,

$$\cos u = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} \quad \text{donc } \cos t^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{u^{4n}}{(2n)!}$$

La fonction h est développable en série entière, avec rayon de convergence infini, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{4n}}{(2n)!}\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\int_0^x \frac{t^{4n}}{(2n)!}dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}.$$

11 Le changement de variable $e^{-x} = u$ conduit a

$$I = \int_1^0 \frac{\ln(1+u)}{u} du$$

Le développement de $\dfrac{\ln(1+u)}{u}$ valable pour $u \in]-1,+1]$ est

$$\frac{\ln(1+u)}{u} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{u^n}{n+1} - \ldots$$

et par intégration terme à terme donne :

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Nous avons établi que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ d'où $I = \dfrac{\pi^2}{12}$.

12 Posons

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

On a :

$$y' = 2.1.a_2 + 3.2.a_3 x + 4.3.a_4 x^2 + 5.4.a_5 x^3 + \ldots + (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n.$$

En substituant dans notre équation différentielle, on trouve :

$$2.1.a_2 + (3.2.a_3 - a_0)x + (4.3.a_4 - a_1)x^2 + (5.4.a_5 - a_2)x^3 + \ldots + ((n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1})x^n + \ldots = 0$$

On obtient les équations algébriques suivantes :

$$\begin{cases} 2.1.a_2 & = & 0 \\ 3.2.a_3 - a_0 & = & 0 \\ 4.3.a_4 - a_1 & = & 0 \\ 5.4.a_5 - a_2 & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \end{cases}$$

On constate que $y(0) = 1 \to a_0 = 1$ et $y'(0) = 0 \to a_1 = 0$, comme la première équation algébrique donne aussi $a_2 = 0$, on a alors

$a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0, a_3 = \dfrac{1}{2.3} = \dfrac{1}{3!}, a_4 = a_5 = 0, a_6 = \dfrac{1}{2.3.5.6} = \dfrac{4}{6!}, a_7 = a_8 = 0,$
$a_9 = \dfrac{1}{2.3.5.6.8.9} = \dfrac{4.7}{9!}$. On remarque que seulement les coefficients $a_{3n}, n \in \mathbb{N}$ sont non nuls. On obtient finalement :

$$a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0 \quad \text{et } a_{3n} = \frac{1.4.7\ldots(3n-2)}{(3n)!}.$$

La solution ainsi construite sera :

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.4.7\ldots(3n-2)}{(3n)!} x^{3n}.$$

Son domaine de convergence est donné par la règle de d'Alembert, on trouve que $R = \infty$. La série est convergente pour tout x dans $\mathbb{R}$.

13

1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$

On pose $y = -x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$ alors on obtient

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(-y)\,\mathrm{d}y + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$

On pose $y = -x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$ alors on obtient

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(-y)\,\mathrm{d}y + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3) $\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_T^{\alpha+T} f(x)\,\mathrm{d}x$

On pose $y = x - T \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ comme f est T-periodique alors on obtient

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\alpha f(y+T)\,\mathrm{d}y = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4) La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos^7(2x)}$ est impaire alors $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{1+\cos^7(2x)}\,\mathrm{d}x = 0.$

14 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction périodique, définie par

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 2 \end{cases} \quad \text{avec } f(x+4) = f(x)$$

f est une fonction continue et périodique de période $T = 4$ et on a

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Calcul des coefficients : f est paire donc $b_n = 0$, $\forall n \geq 1$ et en intégrant :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\omega}{\pi} \int_{-2}^{2} |x|\, dx \\ &= \frac{\pi/2}{\pi} \int_{-2}^{2} |x|\, dx \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \int_{0}^{2} x\, dx \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \frac{2^2}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{\pi/2}{\pi} \int_{-2}^{0} (-x) \cos(n\frac{\pi}{2}x)\, dx + \frac{\pi/2}{\pi} \int_{0}^{2} x \cos(n\frac{\pi}{2}x)\, dx$$

En intégrant par parties

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\pi/2}{\pi} \left[(-x) \frac{\sin(\frac{n\pi}{2}x)}{n\pi/2} |_{-2}^{0} + \int_{-2}^{0} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2}x)}{n\pi/2}\, dx \right] \\ &+ \frac{\pi/2}{\pi} \left[x \frac{\sin(\frac{n\pi}{2}x)}{n\pi/2} |_{0}^{2} - \int_{0}^{2} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2}x)}{n\pi/2}\, dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{n\pi} x \sin(\frac{n\pi}{2}x)|_{-2}^{0} - (\frac{2}{n\pi})^2 \cos(\frac{n\pi}{2}x)|_{-2}^{0} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{2}{n\pi} x \sin(\frac{n\pi}{2}x)|_{0}^{2} + (\frac{2}{n\pi})^2 \cos(\frac{n\pi}{2}x)|_{0}^{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[0 - (\frac{2}{n\pi})^2 (1 - (-1)^n) \right] + \frac{1}{2} \left[0 + (\frac{2}{n\pi})^2 ((-1)^n - 1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(\frac{2}{n\pi})^2 ((-1)^n - 1) \right] + \frac{1}{2} \left[(\frac{2}{n\pi})^2 ((-1)^n - 1) \right] \\ &= (\frac{2}{n\pi})^2 ((-1)^n - 1) \\ &= \begin{cases} 0, & si\ n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ \dfrac{-8}{(n\pi)^2}, & si\ n = 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où la série de Fourier associée à f :

$$f(x) \sim 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x/2}{n^2}$$

Vérification des conditions de Jordan :

- on a $|f(x)| \leq 2$
- f restreinte à $[-2, 0]$ est décroissante et à $[0, 2]$ est croissante.

f vérifie les conditions de Jordan, donc

15 Soit la fonction 2π périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x+\pi & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

1) **Vérification des conditions de Jordan :**

- on a $|f(x)| \leq 2\pi$
- f est monotone continue sur $]-\pi, 0[$ et $]0, \pi[$.

donc, elle est développable en série de Fourier, et l'on a

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

Calcul des coefficients : f est paire donc $b_n = 0,\ \forall n \geq 1$ et en intégrant :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{2}{\pi}\Big[\pi x - \frac{x^2}{2}\Big]_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)dx = \frac{4}{\pi(2n+1)^2}$$

Donc,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

2. Pour obtenir la valeur demandée, il suffit de poser $x = 0$, on obtient alors :

$$f(0) = \pi = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

16 Soit $f(x) = x^2 - \pi^2$, $x \in [-\pi, \pi[$.

1. Comme f est Riemann-intégrable et périodique, donc on peut toujours lui associer sa série de Fourier définie par :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

avec :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Calcul des coefficients :

Comme f est paire alors les coefficients b_n sont nuls. Alors, on intègre a_n deux fois par parties on obtient :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\Big[(x^2 - \pi^2)\frac{\sin(nx)}{n}\Big]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n}.2xdx$$
$$a_n = -\frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x\sin(nx)dx = -\frac{4}{n\pi}\Big[(x\frac{-\cos(nx)}{n}\Big]_0^{\pi} + \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{-\cos(nx)}{n} = 4\frac{(-1)^n}{n^2}$$

et

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2)dx = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{x^3}{3} - \pi^2 x\Big]_0^{\pi} = -\frac{4}{3}\pi^2$$

Finalement, on a

$$f(x) \sim -\frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

Pour montrer que f est développable en série de Fourier il suffit de vérifier que :

i) f satisfait les hypothèses du théorème de Dirichlet ;

ii) f est régulière.

• Nous remarquons que f n'admet que $-\pi$ comme éventuel point de discontinuité dans l'intervalle $[-\pi, \pi[$, donc f est régulière sauf peut-être au point $-\pi$. On a en ce point,

$$\frac{f(-\pi + 0) + f(-\pi - 0)}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0 = f(-\pi)$$

donc f est régulière partout. Reste à justifier i) :

• En considérant l'intervalle $[-\pi, \pi[$, la fonction f est monotone continue dans chacun des intervalles$]-\pi, 0[$ et $]0, \pi[$. De plus la fonction f est bornée. Par suite f est développable en série de Fourier, et l'on a :

$$f(x) = -\frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) ; \forall x \in \mathbb{R}$$

2) • On pose $x = \pi$ dans la formule de $f(x)$, on aura :

$$f(\pi) = 0 = -\frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi) = -\frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

• De même pour $x = 0$ on a :

$$f(0) = -\pi^2 = -\frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(0) = -\frac{2}{3}\pi^2 - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

17 Soit la fonction f de période 2π, définie dans $[0, 2\pi[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\pi}{2} & \text{si } x \in]0, 2\pi[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

• La fonction f est régulière. En effet, elle n'admet que 0 comme un éventuel point de discontinuité dans $[0; 2\pi[$ et l'on a

$$\frac{f(0+0) + f(0-0)}{2} = \frac{\dfrac{-\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}}{2} = 0 = f(0)$$

De plus, f satisfait les hypothèses du théorème de Jordan, car

$$|f(x)| \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } f \text{ est monotone continue sur }]0; 2\pi[$$

donc elle est développable en série de Fourier, et l'on a

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx); \forall x \in \mathbb{R}$$

avec $a_n = 0$ car f est une fonction impaire, **Calcul des coefficients :**

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x-\pi}{2} \sin(nx) dx = -\frac{1}{n}$$

Donc,

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}; \forall x \in \mathbb{R}$$

18 1. Soit $f(x)$ étant une fonction paire alors sa transformée de Fourier serait :

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (1-x) \cos(\alpha x) dx,$$

par une intégration par parties on a :

$$F_c(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2}(1 - \cos \alpha).$$

2. $g(x)$ est impaire, alors :

$$G_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(x) \sin(\alpha x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (1-x) \sin(\alpha x) dx,$$

par une intégration par parties on a :

$$G_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\alpha^2}(\alpha - \sin \alpha).$$

19 On a :

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2 + \alpha^2} \Longrightarrow f(x) = e^{-\beta x} = \frac{2\beta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{\beta^2 + \alpha^2} d\alpha$$

$$F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\beta^2 + \alpha^2} \Longrightarrow f(x) = e^{-\beta x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \sin(\alpha x)}{\beta^2 + \alpha^2} d\alpha$$

sont des intégrales de Laplace.

20 1.

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\alpha t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(a+i\alpha)t} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(a+i\alpha)t}}{a+i\alpha} \Big|_0^{\infty}$$

alors :

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \frac{1}{a+i\alpha}$$

et

$$e^{-at} \rightleftharpoons \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \frac{1}{a+i\alpha}$$

Formule réciproque

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha \text{ soit } e^{-at} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{a+i\alpha} d\alpha$$

2. a. On peut écrire :

$$\frac{1}{(a+i\alpha)^2} = \frac{1}{a+i\alpha} . \frac{1}{a+i\alpha} = F(\alpha).F(\alpha).$$

Or on sait que

$$f * g \rightleftharpoons F(\alpha).G(\alpha) \text{ soit :}$$

$$f * f \rightleftharpoons F(\alpha).F(\alpha) \text{ et } f * f = \int_0^t f(\tau) f(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-a\tau} e^{-a(t-\tau)} d\tau$$

donc,

$$f * f = te^{-at} \text{ alors } \frac{1}{(a+i\alpha)^2} \rightleftharpoons te^{-at}$$

b.

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{a+i\alpha}\right) = -\frac{i}{(a+i\alpha)^2},$$

et on utilisons la formule de dérivation il vient :

$$\frac{d}{d\alpha} F(\alpha) \rightleftharpoons (-it) f(t) \text{ soit}$$

$$-\frac{i}{(a+i\alpha)^2} \rightleftharpoons (-it) e^{-at} = -ite^{-at}$$

ou bien

$$\frac{1}{(a+i\alpha)^2} \rightleftharpoons te^{-at}$$

Bibliographie

[1] **Amroun Nour eddinne**, *Cours de séries numériques. Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbes Algérie, 2007,*

[2] **Hakem Ali**, *Cours et exercices corrigés sur séries . Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbes Algérie, ,*

[3] **François Liret**, *Maths en pratique à l'usage des étudiants (Cours et exercices)*, Dunod.

[4] **Mansouri Abdehamid**, *Analyse(Module 301), Cours et Exercices résolus, I.N.E.S de Mécanique. Batna, OPU 1992.,*