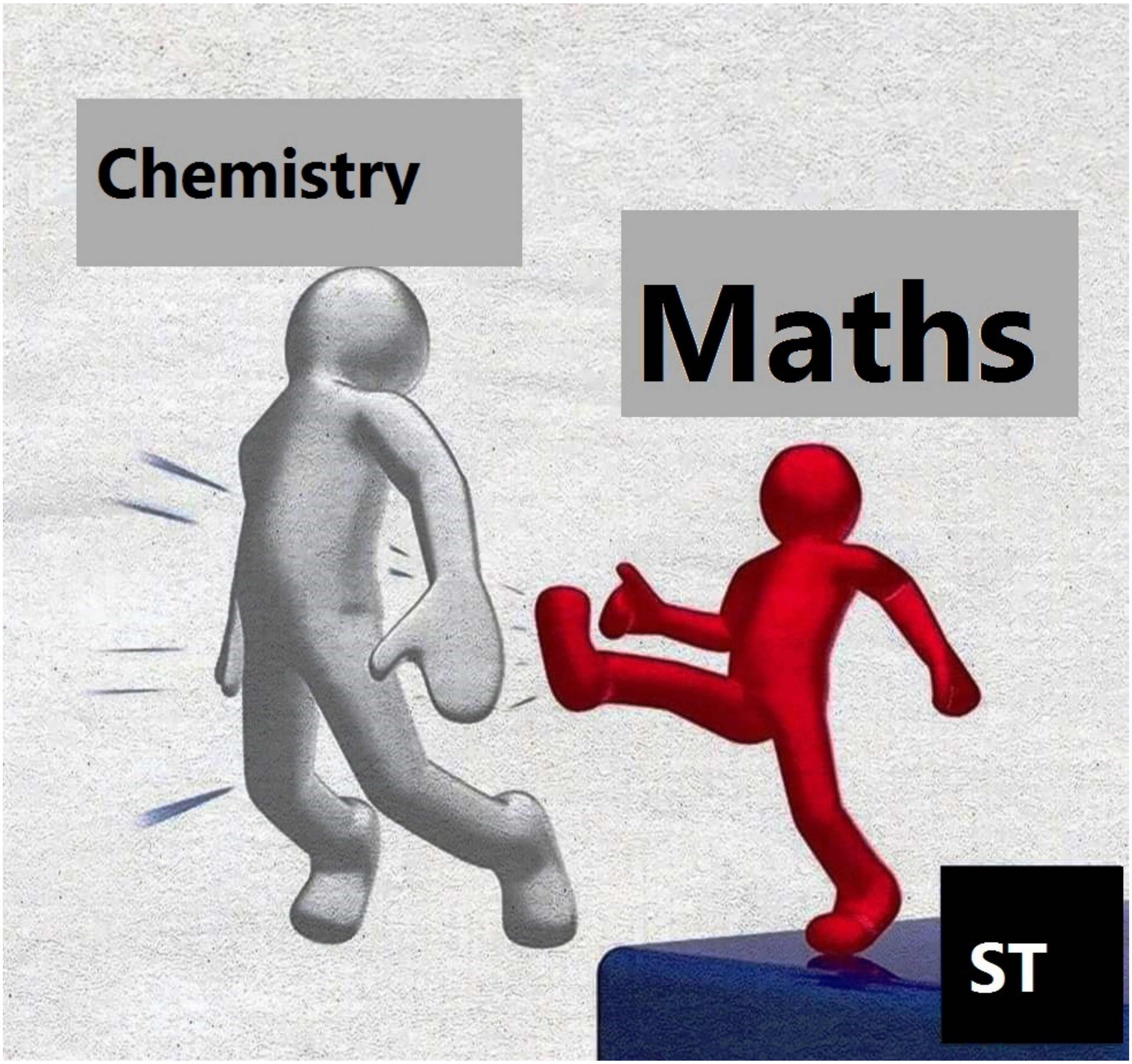


Merci à Didier Muller et Bekkara Samir

Cours de Mathèmatiques 1.

Difi Sid Ahmed.

Table des matières

Préliminaires

Le but de ce travail est de donner un support de cours en mathématiques 1 adapté aux étudiants de la première année des troncs communs technologiques du systéme LMD. La table des matières n'est rien d'autre que le programme de mathématiques 1 èmanant du ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique pour l'année 2013-2014, à un changement prés (des chapîtres du deuxième semestre ont ètè avancè pour cause qu'ils sont utilisés en chimie et physique). Dans le but d'alléger le manuscrit, presque toutes les preuves ont été omises à quelque exceptions prés, en revanche, il a été enrichis par beaucoup d'exemples, commentaires, figures et remarques. Ceci devrais permettre une meilleur compréhension des notions présentées. Pour ces exemples, on peut trouvé beaucoup de notions qui seront bien définies qu'après l'exemple en question, notamment, l'utilisation des fonctions trigonométriques, exponentielles, logarithmiques et le calcul vectoriel. A la fin de ce polycopié, il est donné une liste de titres de livres, qui représente une source bibliographique plus qu'une liste de références ; où le lecteur voulant approfondir ses connaissences sur une notion, y trouvera ce qu'il cherche. Sans aucun doute, ce travail contient des erreurs de tous types, je serais trés reconnaissant à tout lecteur de me faire part de n'importe quelles remarques, suggestions et / ou rectifications, par voie èlectronique à mon adresse Email : sidahmedmt@yahoo.fr.

Chapitre 1

Méthodes de raisonnement mathèmatiques

1.1 Raisonnement direct

C'est le mode de raisonnement le plus utilisé en mathématiques et dans les autres specialités. Il consiste à considérer deux propriétés A et B et montrer que si A est vraie alors B est vraie, en d'autres termes, on suppose que A est vraie, et par des déductions logiques on montre que B est vraie. Qui est formalisé par

$$A \Rightarrow B, \ qui\ se\ lit\ A\ implique\ B$$

Exemple Montrons que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 3$

$$n\ premier \Rightarrow n+1\ n'est\ pas\ premier$$

Soit $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geq 3$ et n premier, ceci entraine que n est impair, car le seul nombre premier et pair est 2. Comme n est impair alors $n+1$ est pair, donc divisible par 2, et par conséquent $n+1$ n'est pas premier.

1.2 Raisonnement par contraposition

Il est appliqué lorsque la propriété à montrer est de la forme : $A \Rightarrow B$.
Si on désigne la négation de A par $\overline{A}$, alors la proposition

$$A \Rightarrow B\ est\ equivalente\ a\ \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$$

Donc au lieu de montrer que A entraine B, on peut montrer que la négation de B entraine la négation de A. On l'utilise quand la deuxième implication est plus simple ou plus facile à formuler que la première.
Exemple
Montrons que si $a \in \mathbf{N}^*$, alors $a^2\ pair \Rightarrow a\ pair$
il serait relativement difficile d'établir que a est pair. On considère alors la contraposition, c'est à dire montrons que $a^2\ impair \Rightarrow a\ impair$
En effet

$$\begin{aligned} a\ impair &\Rightarrow a = 2k+1;\ k \in \mathbf{N} \\ &\Rightarrow a^2 = (2k+1)^2;\ k \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad a^2 = 2(2k^2+2k)+1;\ k \in \mathbf{N} \\
&\Rightarrow \quad a^2 = 2k'+1;\ k' = 2k^2+2k;\ k \in \mathbf{N} \\
&\Rightarrow \quad a \ impair.
\end{aligned}$$

1.3 Raisonnement par l'absurde

Il consiste à considérer une propriétés $\mathcal{P}$ et montrer que sa négation est absurde ou impossible, donc la propriété en question ne peut être que vraie. On utilise ce mode de démonstration quand la propriété $\mathcal{P}$ est difficile ou compliquée à formuler et que sa négation est plus simple, en paticulier si la propriété $\mathcal{P}$ est elle même une négation.
Exemple

بِسْمِ اللَّـهِ الرَّحْمَـٰنِ الرَّحِيمِ

. وَإِذْ قَالَ إِبْرَاهِيمُ لِأَبِيهِ آزَرَ أَتَتَّخِذُ أَصْنَامًا
آلِهَةً ۖ إِنِّي أَرَاكَ وَقَوْمَكَ فِي ضَلَالٍ
مُبِينٍ ﴿74﴾ وَكَذَٰلِكَ نُرِي إِبْرَاهِيمَ مَلَكُوتَ
السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلِيَكُونَ مِنَ
الْمُوقِنِينَ ﴿75﴾ فَلَمَّا جَنَّ عَلَيْهِ اللَّيْلُ رَأَىٰ
كَوْكَبًا ۖ قَالَ هَٰذَا رَبِّي ۖ فَلَمَّا أَفَلَ قَالَ لَا
أُحِبُّ الْآفِلِينَ ﴿76﴾ فَلَمَّا رَأَى الْقَمَرَ بَازِغًا
قَالَ هَٰذَا رَبِّي ۖ فَلَمَّا أَفَلَ قَالَ لَئِنْ لَمْ يَهْدِنِي
رَبِّي لَأَكُونَنَّ مِنَ الْقَوْمِ الضَّالِّينَ ﴿77﴾ فَلَمَّا
رَأَى الشَّمْسَ بَازِغَةً قَالَ هَٰذَا رَبِّي هَٰذَا
أَكْبَرُ ۖ فَلَمَّا أَفَلَتْ قَالَ يَا قَوْمِ إِنِّي بَرِيءٌ
مِمَّا تُشْرِكُونَ ﴿78﴾ إِنِّي وَجَّهْتُ وَجْهِيَ لِلَّذِي
فَطَرَ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضَ حَنِيفًا ۖ وَمَا أَنَا
مِنَ الْمُشْرِكِينَ ﴿79﴾

(75) Ainsi avons-Nous montré à Abraham le royaume des cieux et de la terre, afin qu'il fût de ceux qui croient avec conviction.
(76) Quand la nuit l'enveloppa, il observa une étoile, et dit: «Voilà mon Seigneur!» Puis, lorsqu'elle disparut, il dit: «Je n'aime pas les choses qui disparaissent».
(77) Lorsqu'ensuite il observa la lune se levant, il dit: «Voilà mon Seigneur!» Puis, lorsqu'elle disparut, il dit: «Si mon Seigneur ne me guide pas, je serai certes du nombre des gens égarés».
(78) Lorsqu'ensuite il observa le soleil levant, il dit: «Voilà mon Seigneur! Celui-ci est plus grand» Puis lorsque le soleil disparut, il dit: «O mon peuple, je désavoue tout ce que vous associez à Allah.
(79) Je tourne mon visage exclusivement vers Celui qui a créé (à partir du néant) les cieux et la terre; et je ne suis point de ceux qui Lui donnent des associés.»

1.4 Raisonnement par contre exemple

On l'utilise pour montrer qu'une propriété universelle est fause, c'est à dire, si on a une propriété de la forme

$$\mathcal{P}_x,\ pour\ tout\ x$$

et on veut montrer qu'elle est fausse, alors il suffit de trouver un x_0 pour lequel $\mathcal{P}_{x_0}$ n'est pas vraie.
Exemple Montrons que la propriété suivante n'est pas vraie

$$x^2 > 1\ pour\ tout\ x \in \mathbb{R}$$

Un contre exemple répond directement à la question, il suffit de prendre $x = 0,2$. On a $0,2 \in \mathbb{R}$ et $(0,2)^2 = 0;04$ donc $(0,2)^2$ n'est pas strictement supérieure à 1.

1.5 Raisonnement par récurrence

Il consiste en ce qui suit :
Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété qui dépend d'un entier n, on veut montrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier n supérieure ou égale à un certain entier n_0, c'est à dire qu'on a une inffinité de propriétés $\mathcal{P}_{n_0}$, $\mathcal{P}_{n_0+1}$, $\mathcal{P}_{n_0+2}$, $\mathcal{P}_{n_0+3}$; et on veut montrer que toutes ces propriétés sont vraies. Pour le faire il suffit de :
1. Montrer que $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie, c'est à dire la première de ces propriétés est vraie.
2. Montrer que pour tout $n \geq n_0$, si $\mathcal{P}_n$ est vraie alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est à dire la véracité d'une de ces propriétés entraine la véracité de la propriété suivante.
Ceci est suffisant pour garantir que pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.
En effet,
-soit $n \in \mathbf{N}$, si $n = n_0$ alors par (1), $\mathcal{P}_n$ est vraie.
-Si $n > n_0$, alors par (2), pour que $\mathcal{P}_n$ soit vraie il suffit que $\mathcal{P}_{n-1}$ soit vraie, toujours par (2), pour que $\mathcal{P}_{n-1}$ soit vraie il suffit que $\mathcal{P}_{n-2}$ soit vraie, ainsi de suite, en un nombre fini d'étapes, ceci revient à ce que $\mathcal{P}_{n_0}$ soit vraie, ce qui est établit par (1).
Exemple Soit $a \neq 1$. Montrons que,

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

La propriété est vraie pour $n = 0$. Il suffit de remplacer n par 0 est on obtient

$$\frac{1 - a}{1 - a} = 1$$

Maintenant pour $n > 0$; Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons que

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

et montrons que

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{n+1} = \frac{1 - a^{n+2}}{1 - a}$$

on a

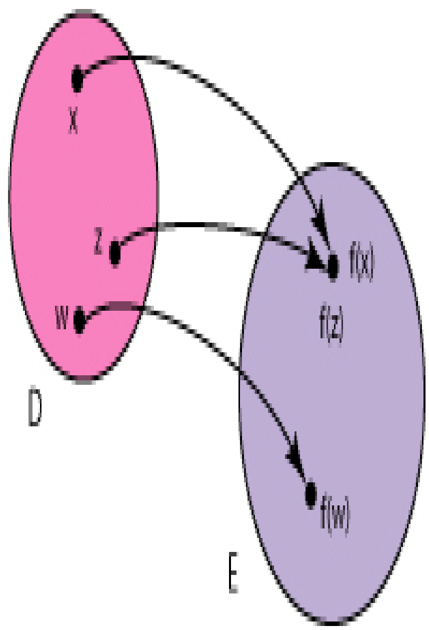
$$\begin{aligned} 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{n+1} &= 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n + a^{n+1} \\ &= \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + a^{n+1} \\ &= \frac{1 - a^{n+2}}{1 - a}. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Fonctions

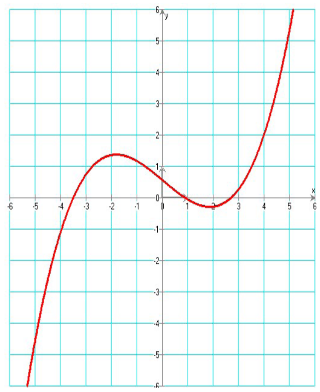
2.1 Introduction au concept de fonction

Achat de sucre au kilo : Vous voulez acheter du sucre à 60 da le kilo. Le prix que vous paierez à la caisse dépendra du nombre de kilos de sucre que vous achèterez. Si on appelle y le prix total (en dinars) et x le nombre de kilos de sucre, la relation entre y et x sera tout simplement $y = 60\ x$. Cette relation est le prix à payer en fonction du poids.
Conclusion : Une fonction est une relation entre deux ensembles, le domaine de définition D (ou ensemble des préimages) et l'ensemble des images E.
A chaque élément du domaine de définition correspond au plus une image. Le domaine de définition D est l'ensemble des nombres qui ont une image dans E. Dans le premier exemple, D est l'ensemble des poids et E l'ensemble des prix. On utilise souvent y pour désigner l'image et x pour la préimage. On dit alors que y est fonction de x et on note plus généralement $y = f(x)$. Cela signifie qu'à droite du signe $=$, il n'y a qu'une variable appelée x.
Il faut bien comprendre que x et y ne sont que des symboles et rien ne nous empêche d'en utiliser d'autres. Par exemple quand la variable est le temps, on utilise volontiers t au lieu de x. Reprenons l'exemple du sucre, à savoir la fonction $y = 60\ x$. Pour connaître le prix de 7 kilos de sucre, on remplacera tout simplement x par 7 et on obtient l'image (le prix) $y = 60 * 7 = 420\ da$.
Soit la fonction $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$. Donnez :
a. f(4) b.f(1) c.4f(x) d. f(4x) e. f(x+4) f. f(4) + f(x) g. f(-x) h. -f(x)
Décidez si les relations ci-dessous sont des fonctions de x. Si oui, trouvez le domaine de définition D.
a. $f(x) = (x+2)^2$ b. $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$ c. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$ d. $f(x) = \pm 3x$
e. $f(x) = \dfrac{x}{\mid x \mid}$



On voit sur ce schéma que chaque préimage n'a qu'une image ; par contre, une image peut avoir plusieurs préimages

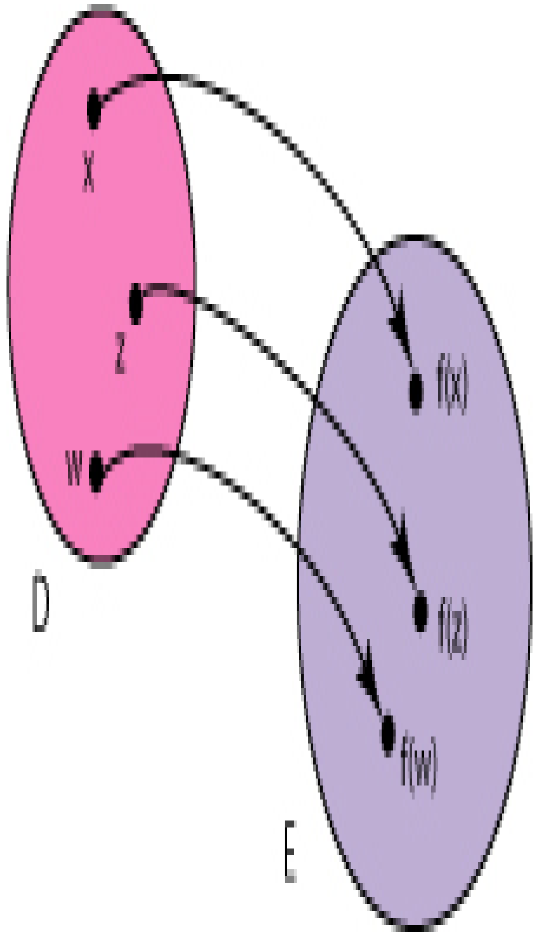
Graphe : La représentation d'une fonction avec des diagrammes sagittaux ou des tableaux devient vite fastidieuse. On préfère une représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé. Le graphe d'une fonction est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ du plan.



Soit la fonction $f(x)$ donnée par son graphe ci-dessus. Lisez sur ce graphique $f(k)$, pour k entier compris dans l'intervalle $[-1; 5]$.

2.2 Bijection

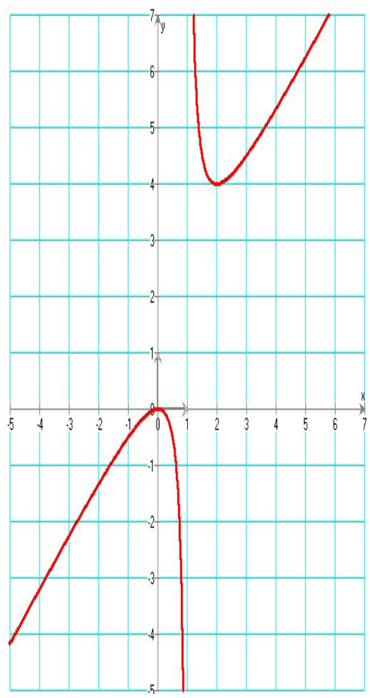
Les bijections sont en fait un concept connu par tous depuis bien longtemps ! Par exemple, lorsque, dans la rubrique jeux des journaux vous devez faire correspondre une couleur à un nom, vous faites une bijection. Une fonction de D vers E est bijective si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :
(1) Pour tout $a \neq b$ dans D, on a $f(a) \neq f(b)$ dans E.
(2) Toutes les fois que $f(a) = f(b)$ dans E, alors $a = b$ dans D.
Il y a le même nombre d'éléments dans D et E, i.e. $Card(D) = Card(E)$.

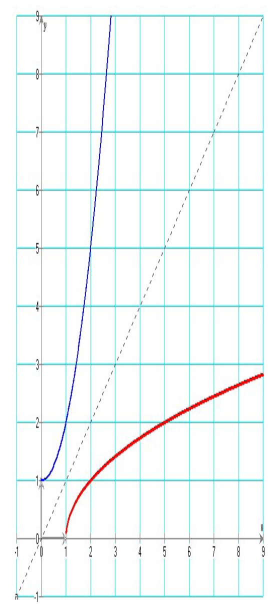


Il y a le même nombre d'éléments dans *D* et *E*, i.e. Card(*D*) = Card(*E*).

Donnez un test simple qui permette de déterminer si une fonction est bijective ou non, en voyant son graphe.
Indication : inspirez-vous du test de la droite verticale.
Les fonctions ci-dessous sont-elles bijectives ?
a. $f(x) = \sqrt{x}$ $(\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+)$ b. $f(x) = x$ $(\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+)$
c. $f(x) = \frac{1}{x}$ $(\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*)$ d. $f(x) = |x|$ $(\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+)$
e. $f(x) = 4x^3$ $(\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})$ f. $f(x) = x^2 - 4$ $(\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})$ Si f est une bijection de D vers E, il existe une fonction réciproque de E vers D, notée f^{-1}, telle que $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$. Comme on peut le voir sur le dessin ci-dessus, la réciproque de la réciproque de f redonne la fonction d'origine, si l'on prend bien garde au domaine de définition et à l'ensemble des images de la fonction f.

Reprenons une dernière fois l'exemple du sucre.
La réciproque de $y = 60x$ est $x = \frac{y}{60}$
Cette fonction nous donne le nombre de kilos de sucre achetés en fonction du prix payé.
Exemple : Si on restreint le domaine de definition D à $\mathbb{R}+$, la fonction reciproque de $y = x^2 + 1$ est $x = \sqrt{y-1}$ avec $E = \{y| \quad y \geq 1\}$. Puisque le symbole utilise pour la variable est sans importance, nous pouvons aussi ecrire $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$.





Donnez, si elle existe, la réciproque des fonctions suivantes :
a.) $y = x^2 + 3$ $(D = \mathbb{R}+)$ b.) $y = x^2 + 3$ c.) $y = (x-1)^3$ d.) $y = \sqrt{x}$

2.3 Propriétés particulières de certaines fonctions

Fonction paire : Une fonction f est paire si $f(x) = f(-x)$. Par exemple $f(x) = x^2$ est une fonction paire, car $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
Sur le graphe d'une fonction paire, l'axe Oy est un axe de symétrie du graphe.
Fonction impaire : Une fonction f est impaire si $f(x) = -f(-x)$. Ainsi, $f(x) = x^3$ est une fonction impaire, car $-f(-x) = -(-x)^3 = x^3 = f(x)$.
Sur le graphe d'une fonction impaire, l'origine est le centre de symétrie centrale du graphe. Autrement dit, en tournant le graphe de 180° autour de l'origine, on retrouve le même graphe.
Impair n'est pas le contraire de **pair**. **Attention** La plupart du temps, **une fonction n'est ni paire ni impaire**.

2.4 Compositions de fonctions

Attention à ne pas confondre composition et multiplication ! Envisageons les fonctions $f(x) = 6x - 4$ et $g(x) = \sqrt{x}$. On peut les appliquer, par exemple : la fonction f suivie de g.
Pour x, on aura :

$$x \longrightarrow f \longrightarrow 6x - 4 \longrightarrow g \longrightarrow \sqrt{6x - 4}$$

On écrira

$$g(f(x)) = \sqrt{6x - 4} \quad ou \quad g \circ f(x) = \sqrt{6x - 4}$$

De même avec la fonction g suivie de f :

$$x \longrightarrow g \longrightarrow \sqrt{x} \longrightarrow f \longrightarrow 6\sqrt{x} - 4$$

On écrira

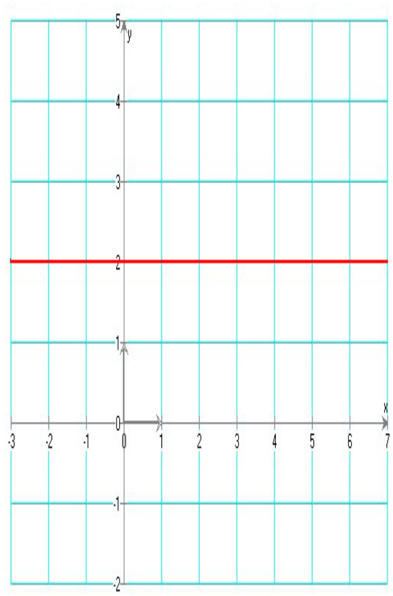
$$f(g(x)) = 6\sqrt{x} - 4 \quad ou \quad f \circ g(x) = 6\sqrt{x} - 4$$

Si f est une bijection, alors on a $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$ Soient les fonctions : $f(x) = x/2$
$g(x) = 1/(x^3 + 1) \quad h(x) = 5 - x$
Calculez $g \circ f$, $h \circ g$, $h \circ (g \circ f)$, $(h \circ g) \circ f$.

Chapitre 3

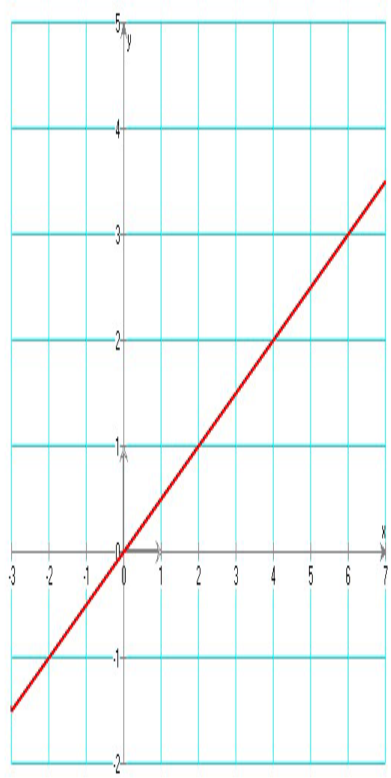
Fonctions affines

3.1 Fonction constante



$f(x) = \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) C'est une droite horizontale passant par l'ordonnée h.
Exemple : la temperature dans une salle climatisee.

3.2 Fonction linéaire



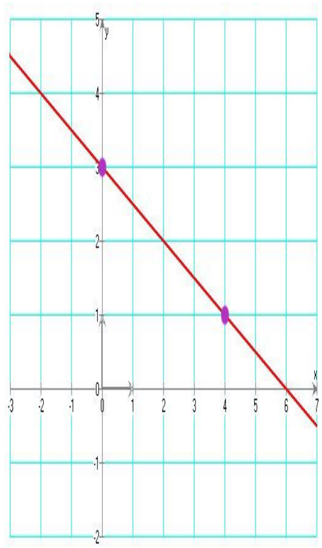
$f(x) = mx$, $(m \in \mathbb{R})$ C'est une droite de pente m passant par l'origine (vous comprendrez plus tard pourquoi m est appele la pente).
Exemple : la fonction permettant de convertir des degres en radians.
Propriétés : Toute fonction linéaire satisfait les propriétés suivantes :

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$$

$$f(\lambda x_1) = \lambda f(x_1), \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

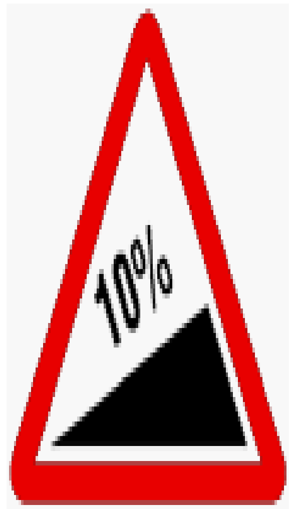
3.3 Fonction affine

$f(x) = (mx + h)$ $(m, h \in \mathbb{R})$. C'est une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine h.
Exemple : la fonction permettant de convertir des degres Celsius en degres Fahrenheit. Les fonctions constantes et les fonctions linéaires sont des cas particuliers des fonctions affines.
Une droite verticale n'est pas une fonction. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions affines ? Mentionnez celles qui sont linéaires ou constantes.
a. $f(x) = |x|$ b. $f(x) = x$ c. $f(x) = 1$ d. $f(x) = bx + a$ e. $f(x) = ax + a2$
f. $f(x) = 1 - x$ g. $f(x) = 1 - x^2$ h. $f(x) = 1/x$ i. $f(x) = x^2 - (x - 1)^2$
Indication : L'équation d'une fonction affine est du type $f(x) = ax + b$. Que vaut a et que vaut b ?
La droite passe donc par les points $(0; 3)$ et $(4; 1)$. Il n'y a plus qu'à reporter ces points sur un graphique et faire passer la droite par ces deux points. On obtient :



3.4 Comment dessiner une droite donnée sous la forme d'une fonction ?

Méthode : Choisir deux valeurs x_1 et x_2, calculer $f(x_1)$ et $f(x_2)$, reporter sur le graphique les points $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$. Tracer enfin la droite passant par ces deux points.
La droite passe donc par les points $(0; 3)$ et $(4; 1)$. Il n'y a plus qu'à reporter ces points sur un graphique et faire passer la droite par ces deux points.
A savoir : Ce panneau de circulation indique une montée dont la pente est de 10%. Cela signifie que l'on monte verticalement de 10 mètres pour un déplacement horizontal de 100 mètres.



La pente est de 10%. Cela signifie que l'on monte verticalement de 10 mètres pour un déplacement horizontal de 100 mètres.

Soit $P_1(x_1;y_1)$ et $P_2(x_2;y_2)$. Soit la droite passant par ces deux points. On appelle pente de cette droite la valeur $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

3.5 Equation d'une droite connaissant sa pente et un point

L'équation d'une droite passant par le point $P_1(x_1,y_1)$ et de pente m est
$y - y_1 = m(x - x_1)$.
En passant y_1 à droite du signe égal, on retrouve l'èquation $y = mx + h$, où $h = y_1 - mx_1$
Exemple : Trouvez l'équation de la droite passant par le point $A(-1;2)$ et de pente 3.
On pose $y - 2 = 3(x + 1)$, on effectue $y - 2 = 3x + 3$ et on simplifie $y = 3x + 5$.
Dessinez le graphe, puis, d'aprés le dessin, trouvez l'équation d'une fonction affine f, telle que :
a. son graphe passe par les points $(3;5)$ et $(6;-1)$,
b. $f(2) = 5$ et son graphe passe par le point $(5;5)$,
c. son graphe passe par le point $(3;6)$ et est de pente 3,
d. son graphe passe par le point $(12;5)$ et $f(12) = 9$,
e. $f(-1) = 2$ et la pente de son graphe vaut -2.

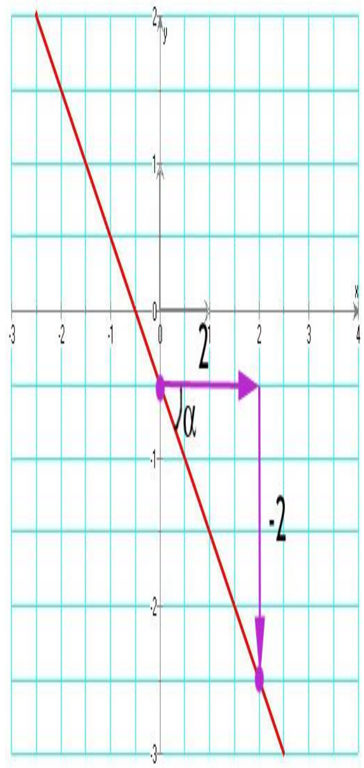
3.6 Comment trouver l'équation d'une droite connaissant deux points ?

Méthode : L'équation générale d'une droite est $y = f(x) = mx + h$. Il faut calculer m et h connaissant les points $P_1(x_1;y_1)$ et $P_2(x_2;y_2)$. Il suffit pour cela de remplacer dans l'équation générale x par x_i et y par y_i, (avec $i = 1$ ou 2). On aura alors un système de deux équations à deux inconnues que l'on résoudra pour obtenir m et h.
Exemple : Soient les deux points $P_1(3;5)$ et $P_2(-2;1)$ par lesquels passe la droite cherchée. Le systeme d'équations que l'on devra resoudre est :

$$5 = 3m + h$$

$$1 = -2m + h$$

En soustrayant la deuxième equation à la première (pour eliminer h), on obtient : $4 = 5m$, d'ou $m = 4/5$ et $h = 1 + 8/5 = 13/5$.
L'equation de la droite est donc : $y = 4/5\ x + 13/5$



3.7 Comment trouver l'intersection de deux fonctions affines ?

Méthode : Soient les fonctions $f(x)$ et $g(x)$. Trouver l'intersection des graphes de f et g revient à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. On trouvera la valeur de l'abscisse x_0 où les deux droites se croisent. Pour trouver l'ordonnée, il suffira de calculer $y_0 = f(x_0)$. On aura ainsi trouvé le point $P_0(x_0; y_0)$.
Nombre de solutions : Il y aura **une** (deux droites sécantes), **aucune** (deux droites parallèles) ou une **infinité** de solutions (deux droites confondues).

3.8 Angle entre deux droites

L'angle aigu de deux droites est donné par $\tan(\alpha) = |\frac{m'-m}{1-m'm}|$ où m' et m sont les pentes des deux droites.
Calculez l'angle d'intersection de la droite $d : x + y = 2$
a. avec l'axe des ordonnées
b. avec la droite $g : 4x + y + 1 = 0$.
Deux droites sont perpendiculaires équivaut à $mm' = -1$

3.9 Fonctions quadratiques

Chacune des six paraboles suivantes est la représentation graphique d'une fonction du type $f(x) = ax^2$.
Déterminez, pour chacune d'elles, la valeur du réel a.
Que constatez-vous ?

$a_1 =$

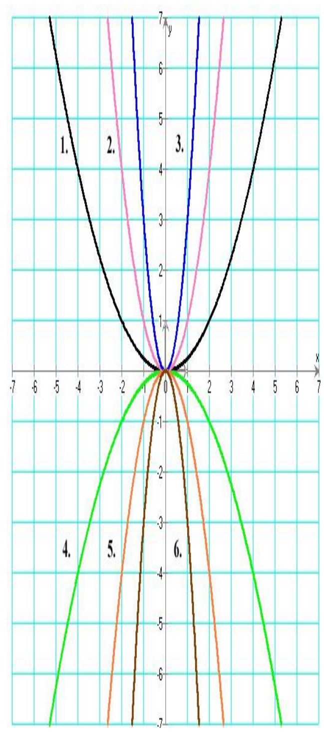
$a_2 =$

$a_3 =$

$a_4 =$

$a_5 =$

$a_6 =$



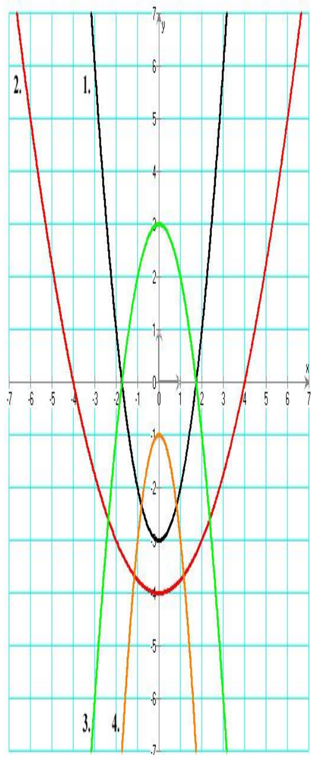
Chacune des quatre paraboles suivantes est la représentation graphique d'une fonction du type $f(x) = ax^2 + q$.
Déterminez, pour chacune d'elles, les valeurs des réels a et q.
Que constatez-vous ?

$a_1 =$ $q_1 =$

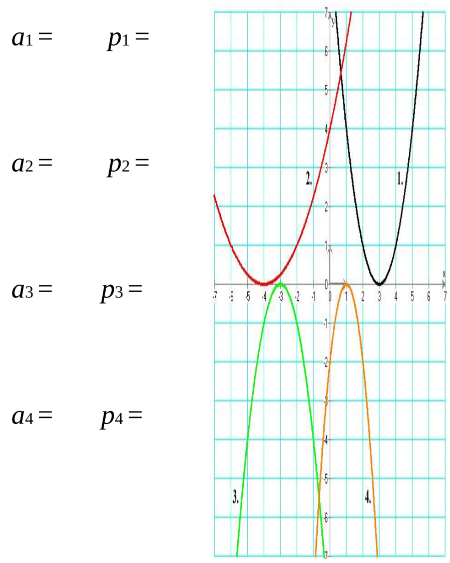
$a_2 =$ $q_2 =$

$a_3 =$ $q_3 =$

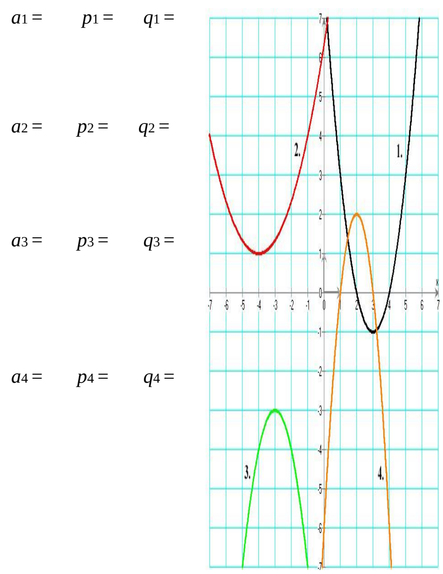
$a_4 =$ $q_4 =$



Chacune des quatre paraboles suivantes est la représentation graphique d'une fonction du type $f(x) = a(x-p)^2$.
Déterminez, pour chacune d'elles, les valeurs des réels a et p.
Que constatez-vous ?



Chacune des quatre paraboles suivantes est la représentation graphique d'une fonction du type $f(x) = a(x-p)^2 + q$.
Déterminez, pour chacune d'elles, les valeurs des réels a, p et q. Pour cela, vous utiliserez les constatations faites aux trois exercices précédents.



Résumé des découvertes :
Equation : $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ Si $a < 0$, la parabole est ouverte vers le bas. Si $a > 0$, elle est ouverte vers le haut.
Zeros : Resoudre $f(x) = 0$. C'est une equation du deuxieme degre.

Donc $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
Factorisation : Si f possede les zeros x_1 et x_2, on a :
$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Sommet : Le sommet $(x_s; y_s)$ de la parabole a pour abscisse $x_s = \frac{-b}{2a}$. L'ordonnee est $y_s = f(\frac{-b}{2a})$.

Chapitre 4

Puissances et racines

4.1 Puissances à exposants entiers

La puissance n^{ieme} d'un nombre réel a est un produit de n facteurs tous égaux à a : $a^2 = aa$, $a^3 = aaa$, etc.
On dit que a est la base de la puissance et n l'exposant. **Propriétés** : Pour tous les réels a et b non nuls et tous les entiers n et m non nuls, on a les propriétés suivantes :
1) $a^0 = 1$ 2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
3) $a^n a^m = a^{n+m}$ 4) $a^n/a^m = a^{n-m}$
5) $(a^n)^m = a^{nm}$ 6) $a^n b^n = (ab)^n$
7) $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$ 8) $n = m \Leftrightarrow a^n = a^m$

4.2 Racines

La racine n^{ieme} d'un nombre reel positif a est le nombre reel positif r dont la puissance n^{ieme} est egale a a :

$$r = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow a = r^n$$

Cette definition est valable lorsque l'indice n est un entier superieur ou egal a 2. Dans le cas ou $n = 2$, on note $\sqrt{a}$ au lieu de $\sqrt[2]{a}$
:
1) Pour tout réel a, on a : $\sqrt{a}^2 = |a|$
2) Si n est impair, il est possible de définir la racine d'un nombre négatif. Cette racine est alors également un réel négatif. **Exemple** : $\sqrt[3]{-8} = -2$
Propriétés : Pour tous les réels positifs non nuls a et b, tous les entiers n et $p \geq 2$ et tous les entiers m, on a les propriétés suivantes :
1) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ 2) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ 3) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ 4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
Attention à ces erreurs : 1) $\sqrt{x^2 + y^2} \neq x + y$ 2) $\sqrt{x + y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

4.3 Puissances à exposants rationnels

Soient m et n des entiers, n étant strictement positif. Sachant que chaque nombre rationnel peut être écrit m/n, on étend la notion de puissance à des exposants rationnels en posant :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

4.4 Logarithmes et exponentielles

Introduction : Imaginons un commerce trés rentable qui propose un gain à 100%, ce qui signifie que la fortune du commerçant doublera chaque année. S'il place un million à l'année 0, voici donc comment augmentera sa fortune :

années	0	1	2	3	4	5	6	7	8
fortune en millions	1	2	4	8	16	32	64	128	256

On remarque que la première ligne du tableau est une progression arithmétique, tandis que la seconde est une progression géométrique.
S'il cherche le numéro de l'année où il possédait une fortune F, il l'appellera le logarithme de sa fortune, soit $n = logF$. Nous dirons que ce logarithme est en base 2, parce que F est multiplié par 2 tous les ans. Ainsi, $0 = log_2(1)$, $1 = log_2(2)$, $2 = log_2(4)$, etc. On a la relation générale :

$$b^x = u \Leftrightarrow x = log_b u \quad (b > 0, \quad b \neq 1, \quad u > 0)$$

Exemple : $10^x = 9 \Leftrightarrow x = log_{10} 9$
Définition du nombre e : Revenons à notre commerçant. Un commerce concurrent apparaît qui propose lui aussi un gain à 100%, mais les gains sont capitalisés tous les mois au lieu de tous les ans. Ainsi, chaque mois, on ajoute à la fortune 1/12 du capital du mois précédent.
Formule des gains composés : $C_n = C_0(1 + i)^n$
avec i : taux, C_0 : capital initial, C_n : capital apres n periodes.
Si le commerçant met 1 million le mois 0, sa fortune sera de $(1 + 1/12)$ le mois 1, $(1 + 1/12)^2$ le mois 2, Au bout d'une année, il aura, $(1 + 1/12)^{12} = 2.613\ millions$.
Capitalisé tous les jours, ce million serait devenu en un an $(1 + 1/365)^{365} = 2.714\ millions$. Si enfin nous supposons que la fortune est capitalisée à chaque instant, le capital au bout d'un an sera la limite de $(1 + 1/n)^n$ quand n tend vers l'infini. À la limite, on démontre que cette somme n'est pas du tout infinie, mais égale à 2.718281828459045...
e est un nombre transcendant, on écrira

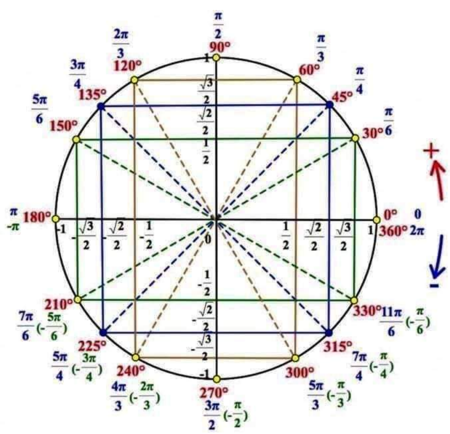
$$e = \lim_{n \to +\infty} (1 + 1/n)^n = 2.718281828459045$$

:

Chapitre 5

Fonctions trigonométriques

5.1 Fonctions périodiques et fonctions trigonométriques



Bon nombre de processus qui se produisent dans la nature sont aussi périodiques : le niveau d'eau d'un bassin de marée, la pression sanguine du coeur, le courant alternatif et la position des molécules d'air qui transmettent un son, par exemple. On peut représenter de tels phénoménes par des fonctions trigonométriques. Les fonctions trigonométriques peuvent se définir à partir du cercle trigonométrique (cercle de rayon 1 centré à l'origine), définition qui les rend périodiques. Une fonction f de la variable x definie sur D ($D \subset \mathbb{R}$) est dite periodique si, quel que soit x, il existe un nombre reel p tel que :

$$(x + p) \in D \ et \ f(x + p) = f(x)$$

Le plus petit nombre reel positif p satisfaisant a cette condition est appele periode de f.

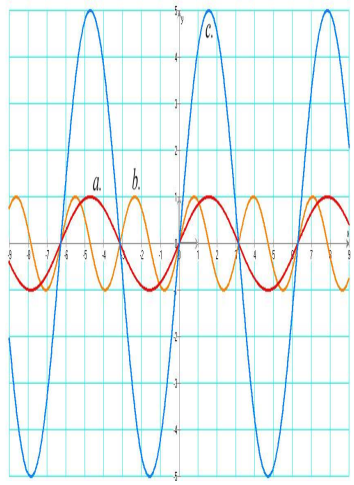
Exemple : $f(x) = 3\cos(x) - 2\sin(2x)$

***f*(*x*) = 3cos(*x*) – 2sin(2*x*)**

L'unité des x est toujours le radian ! **Fonction sinusoïdale** : Fonction dont le graphique ressemble au graphique de la fonction sinus ; fonctions sinus et cosinus et toutes leurs formes qui ont subi des translations, des étirements ou des compressions.
Amplitude : Distance entre la moyenne d'une fonction sinusoïdale et sa valeur maximale ; moitié de la distance entre le minimum et le maximum d'une fonction sinusoïdale.
Déphasage : Translation horizontale d'une fonction sinusoïdale.

5.2 Fonction sinus

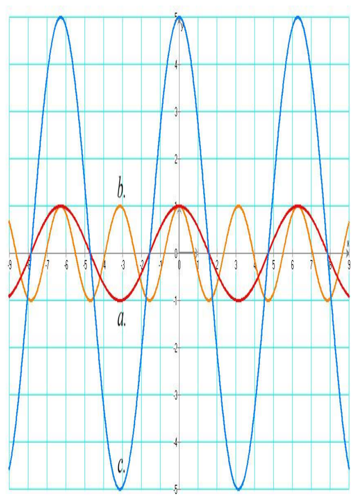
La fonction sinus varie entre -1 et 1. C'est une fonction bornée.
La période de la fonction $\sin(x)$ est 2π.
La fonction sinus est une fonction impaire : pour tout réel x on a $\sin(-x) = -\sin(x)$.



a. : sin(x)
b. : sin(2x)
c. : 5sin(x)

5.3 Fonction cosinus

La fonction cosinus varie entre -1 et 1. C'est une fonction bornée. La période de la fonction $\cos(x)$ est 2π.
La fonction cosinus est une fonction paire : pour tout rèel x on a $\cos(-x) = \cos(x)$.

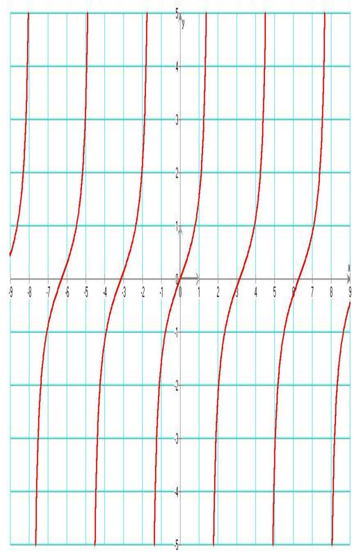


a. : cos(x)
b. : cos(2x)
c. : 5cos(x)

la fonction cosinus est decalée de $\pi/2$ vers la gauche par rapport a la fonction sinus.

5.4 Fonction tangente

La fonction tangente varie entre $-\infty$ et $+\infty$. C'est une fonction non bornée.
La période de la fonction $\tan(x)$ est π.
La fonction tangente est une fonction impaire : pour tout réel x on a $\tan(-x) = -\tan(x)$.



Fonction tangente

5.5 Fonction cotangente

La fonction cotangente varie entre $-\infty$ et $+\infty$. C'est une fonction non bornée.
La période de la fonction $\tan(x)$ est π.
La fonction tangente est une fonction impaire : pour tout réel x on a $\cot(-x) = -\cot(x)$.

5.6 Equations trigonométriques

On appelle équation trigonométrique toute équation comportant des fonctions trigonométriques de l'inconnue (ou des inconnues). Rappelons que l'on travaille toujours en radians !
Indication 1) Pour résoudre une équation du type $\sin(u) = c$, avec $|c| \leq 1$, on utilise l'équivalence :

$$\sin(u) = c \Leftrightarrow u = \arcsin(c) + 2k\pi \; ou \; u = \pi - \arcsin(c) + 2k\pi, \; avec \; k \in \mathbb{Z}$$

2) Pour résoudre une équation du type $\sin(u) = \sin(v)$, on utilise l'équivalence :

$$\sin(u) = \sin(v) \Leftrightarrow u = v + 2k\pi \; ou \; u = \pi - v + 2k\pi, \; avec \; k \in \mathbb{Z}$$

3) Pour résoudre une équation du type cos(u) = c, avec $|c| \leq 1$, on utilise l'équivalence :

$$\cos(u) = c \Leftrightarrow u = \arccos(c) + 2k\pi \; ou \; u = -\arccos(c) + 2k\pi, \; avec \; k \in \mathbb{Z}$$

4) Pour résoudre une équation du type cos(u) = cos(v), on utilise cette équivalence :

$$\cos(u) = \cos(v) \Leftrightarrow u = v + 2k\pi \; ou \; u = -v + 2k\pi, \; avec \; k \in \mathbb{Z}$$

5) Pour résoudre une équation du type $\tan(u) = c$, on utilise l'équivalence :

$$\tan(u) = c \Leftrightarrow u = \arctan(c) + k\pi \ avec \ k \in \mathbb{Z}$$

6) Pour résoudre une équation du type $\tan(u) = \tan(v)$, on utilise cette équivalence :

$$\tan(u) = \tan(v) \Leftrightarrow u = v + k\pi \ avec \ k \in \mathbb{Z}$$

7) Pour résoudre une équation du type $\cot(u) = c$, on utilise l'équivalence ci-dessous :

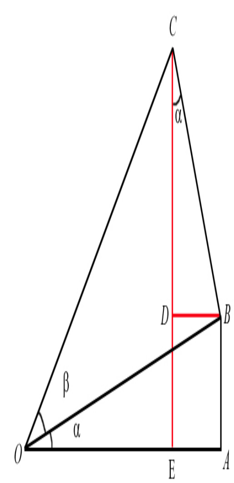
$$\cot(u) = c \Leftrightarrow u = arccot(c) + k\pi \ avec \ k \in \mathbb{Z}$$

8)Pour résoudre une équation du type cot(u) = cot(v), on utilise l'équivalence ci-dessous :

$$\cot(u) = \cot(v) \Leftrightarrow u = v + k\pi \ avec \ k \in \mathbb{Z}$$

5.7 Relations trigonométriques

Il s'agit d'établir des relations qui permettront de résoudre des équations impliquant des fonctions trigonométriques différentes. Le dessin ci-dessous va nous servir à établir une relation pour $\sin(a + b)$. Toutes les autres relations découleront de celle-là.



Le dessin ci-dessus va nous servir à établir une relation pour sin(α+β).

$$sin(\alpha+\beta) = \frac{\overline{CD+DE}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} + \frac{\overline{DE}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}\frac{\overline{CB}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{DE}}{\overline{OC}}\frac{\overline{OB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{OC}}\frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$$
$$= \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha$$

d'où

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \Rightarrow \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \Rightarrow \tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

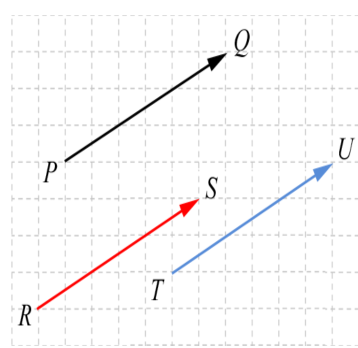
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Chapitre 6

Calcul vectoriel

6.1 Les vecteurs

Introduction : En termes simples, un vecteur est une grandeur qui a une intensité (longueur), une direction et un sens. Il est commode de le représenter par une flèche.
Deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont egaux s'ils ont la meme intensite (longueur), la même direction et le meme sens.
Exemple : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{TU}$



Le vecteur qui a une longueur de 0 est appelé vecteur nul et est noté $\overrightarrow{0}$.
Le vecteur nul n'a évidemment pas de direction, donc pas de sens. Pour l'addition et la multiplication et leurs proriétés, le soin est laissè aux étudiant pour réviser les cours de la terminale.

6.2 Représentation des vecteurs dans le plan

Introduction : On utilise un systeme de coordonnees rectangulaires pour representer les vecteurs dans le plan. Appelons $\overrightarrow{i}$ un vecteur de longueur 1 dont la direction est celle de l'axe Ox et $\overrightarrow{j}$ un vecteur de longueur 1 dont la direction est celle de l'axe Oy.

$$\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

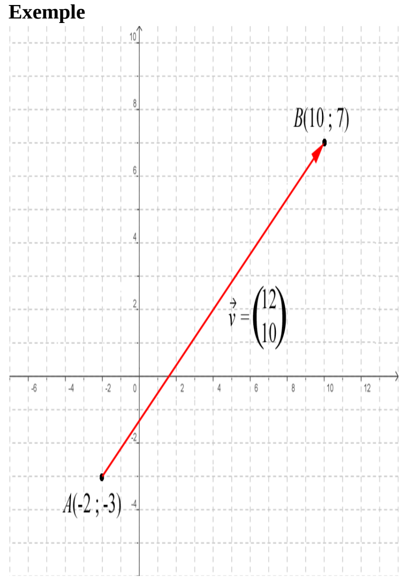
En deux dimensions, les deux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ forment ce que l'on appelle la base canonique. Elle est orthonormée : les deux vecteurs sont orthogonaux et ont une longueur de 1.
Si $\overrightarrow{v}$ est un vecteur ayant son point initial a l'origine O et son point terminal en $P(a, b)$, alors on peut representer $\overrightarrow{i}$ comme combinaison des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$:

$$\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Supposons qu'un vecteur $\overrightarrow{v}$ a pour point initial $P_1(x_1, y_1)$ et comme point terminal $P_2(x_2, y_2)$. On a alors :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\overrightarrow{i} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Exemple



Deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont egaux si et seulement si leurs composantes correspondantes sont egales.
Propriété : Nous pouvons à présent définir l'addition, la soustraction et le produit en utilisant les composantes d'un vecteur. Soient $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a \\ \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} c \\ \\ d \end{pmatrix}$ deux vecteurs et λ un scalaire. Alors :

1) $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} a \\ \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ \\ b + d \end{pmatrix}$ 2) $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} a \\ \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c \\ \\ b - d \end{pmatrix}$

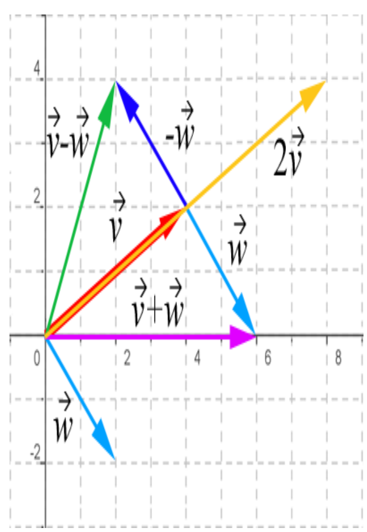
3) $\lambda\overrightarrow{v}=\lambda\begin{pmatrix} a \\ \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a \\ \\ \lambda b \end{pmatrix}$

6.3 Norme d'un vecteur

Si $\overrightarrow{v}$ est un vecteur, on utilise le symbole $||\overrightarrow{v}||$ pour représenter la **norme** de $\overrightarrow{v}$.
Indication : Les quatre termes suivants sont synonymes : norme, intensité, longueur, module.
Propriété : Puisque $||\overrightarrow{v}||$ sera la longueur du vecteur, la norme doit avoir les cinq propriétés suivantes :
Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteurs et λ un scalaire, alors :
1) $||\overrightarrow{v}|| \geq 0$ 2) $||\overrightarrow{v}|| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
3) $||-\overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{v}||$ 4) $||\lambda\overrightarrow{v}|| = |\lambda|||\lambda\overrightarrow{v}||$
5) $||\overrightarrow{\lambda v + w}|| \leq ||\lambda\overrightarrow{v}|| + ||\lambda\overrightarrow{w}||$, inégalité du triangle
Un vecteur $\overrightarrow{v}$ pour lequel la norme $||\overrightarrow{v}|| = 1$ est qualifié de vecteur unité (ou unitaire).
Dans le plan muni d'un système orthonormé, on a :

$$\left\|\overrightarrow{\begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}}\right\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Exemple :



$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$ $\|\overrightarrow{w}\| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8}$
$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$-$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

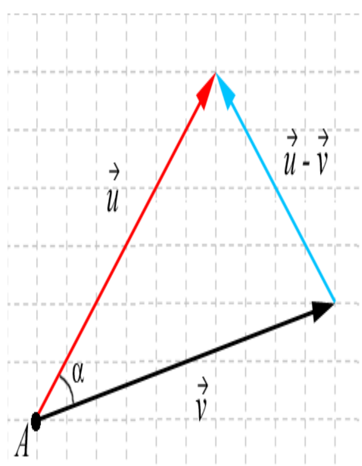
$2\overrightarrow{v} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ Pour tout vecteur non nul, le vecteur $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$ est un vecteur unité qui a la même direction et le même sens que $\overrightarrow{v}$. On peut rendre unitaire n'importe quel vecteur (non nul) en le multipliant par l'inverse de sa norme.

6.4 Le produit scalaire

Le produit scalaire est une opération algébrique s'ajoutant aux lois s'appliquant aux vecteurs. À deux vecteurs, elle associe leur produit, qui est un nombre (ou scalaire, d'oú son nom). Elle permet d'exploiter les notions de la géométrie euclidienne traditionnelle : longueurs, angles, orthogonalité Si $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan, alors le produit scalaire $\overrightarrow{v}\overrightarrow{w}$ est défini ainsi : $\overrightarrow{v}\overrightarrow{w} = ac + bd$ **Exemple** : Soient $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Calculez :
1) $\overrightarrow{v}\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w}\overrightarrow{v} = 2 * 5 + (-3) * 3 = 5 * 2 + 3 * (-3) = 1$ 2) $\overrightarrow{v}\overrightarrow{v} = 2 * 2 + (-3) * (-3) = 13$ 2) $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ Si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont des vecteurs, alors
$\overrightarrow{u}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\overrightarrow{u}$
$\overrightarrow{u}(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}\overrightarrow{w}$
$\overrightarrow{u}\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$
$\overrightarrow{0}\overrightarrow{u} = 0$
$(\lambda\overrightarrow{v})\overrightarrow{w} = \lambda(\overrightarrow{v}\overrightarrow{w})$

6.5 Angle entre deux vecteurs

Le produit scalaire permet de mesurer l'angle compris entre deux vecteurs.
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs ayant le meme point initial A. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ forment un triangle. C'est l'angle a au point A que l'on appelle l'angle compris entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.



Les trois cotes du triangle ont pour longueurs $\|\overrightarrow{u}\|$, $\|\overrightarrow{v}\|$ et $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|$. Le theoreme du cosinus nous dit : $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos(\alpha)$
Comme $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}$
En combinant l'équation précedente, on obtient $\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos(\alpha)$
Si $\|\overrightarrow{u}\|$ et $\|\overrightarrow{v}\|$ sont deux vecteurs non nuls, l'angle α, $0 \leq \alpha \leq \pi$, compris entre les vecteurs $\|\overrightarrow{u}\|$ et $\|\overrightarrow{v}\|$ est donne par la formule :
1) $\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|}$
2) $\cos(\alpha) = \dfrac{|\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}|}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|}$ donne l'angle aigu

6.6 Vecteurs parallèles

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont parallèles (on dit aussi colinéaires) s'il existe un scalaire non nul λ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$
Exemple : Les vecteurs $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = -6\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ sont parallèles, puisqu'on peut écrire $\overrightarrow{u} = -1/2\overrightarrow{v}$. On aurait aussi pu voir que

$$\cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}|}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{-18-2}{\sqrt{10}\sqrt{40}} = -1$$

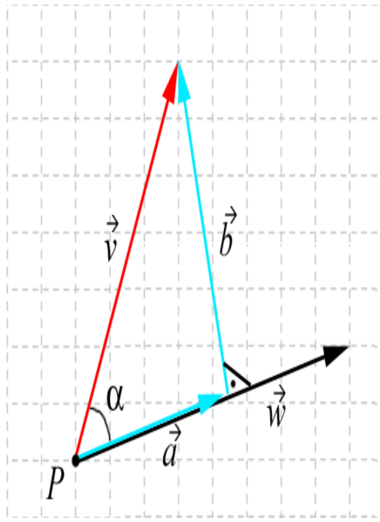
ce qui implique que l'angle α entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est π

6.7 Vecteurs orthogonaux

Si l'angle entre deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vaut $\pi/2$, on dit que les vecteurs sont orthogonaux. Puisque le vecteur nul n'a pas de direction, on utilise comme convention que le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs. Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = 0$

6.8 Projection d'un vecteur sur un autre vecteur

Soient $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs non nuls ayant la même origine P. Nous cherchons a decomposer $\overrightarrow{v}$ en deux vecteurs : $\overrightarrow{a}$ qui sera parallele a $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{b}$ qui sera orthogonal a $\overrightarrow{w}$. Le vecteur $\overrightarrow{a}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{w}$.



$$\vec{v} = \vec{a} = \vec{b}$$

Cherchons à exprimer $\vec{a}$ en fonction de $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$\vec{v}\,\vec{w} = (\vec{a} + \vec{b})\vec{w} = \vec{a}\,\vec{w} + \vec{b}\,\vec{w} \tag{6.8.1}$$

Puisque $\vec{b}$ est orthogonal a $\vec{w}$, nous avons $\vec{b}\,\vec{w} = 0$. De plus, comme $\vec{a}$ est parallele a $\vec{w}$, nous avons $\vec{a} = \lambda\vec{w}$, λ etant un scalaire dont nous allons chercher la valeur.
Ainsi, l'équation (6.8.1) peut se réécrire : $\vec{v}\,\vec{w} = \vec{a}\,\vec{w} = \lambda\vec{w} = \lambda\|\vec{w}\|^2$
Ce qui implique que : $\lambda = \dfrac{\vec{v}\,\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}$ d'où $\vec{a} = \lambda\vec{w} = \dfrac{\vec{v}\,\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}$ Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non nuls. Le vecteur projection de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$ est : $proj_{\vec{w}}\vec{v} = \dfrac{\vec{v}\,\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}$ Soit α l'angle entre deux vecteurs non nuls $\vec{v}$ et $\vec{w}$. La longueur du vecteur $\vec{v}$ projeté orthogonalement sur $\vec{w}$ est $\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$. Decomposez $\vec{w}$ en deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, ou $\vec{a}$ est parallele a $\vec{w}$ et $\vec{b}$ orthogonal a $\vec{w}$.

1) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 2) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

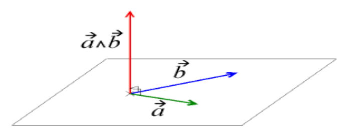
3) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 4) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

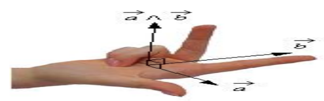
Que remarquez-vous en comparant les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{b}$?

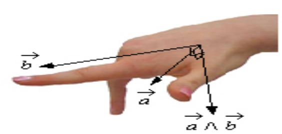
6.9 Le produit vectoriel

Soient deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ formant un angle α.
Par definition, le produit vectoriel de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le vecteur note $\vec{a} \wedge \vec{b}$ (lire $\vec{a}$ cross $\vec{b}$) tel que :
1. la direction de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est orthogonale a chacun des deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$;
2. le sens de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ donne au triplet $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{a} \wedge \vec{b})$ une orientation directe : cette orientation est donnee par la regle des trois doigts de la main droite (pouce, index, majeur), illustree ci-apres ;

3. la norme de $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$:
$\|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| \sin(\alpha)$







Composantes du vecteur $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ dans une base $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ orthonormée : Le produit vectoriel de $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$
est le vecteur $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} bf - ce \\ ce - af \\ ae - bd \end{pmatrix}$ **Astuce pour calculer $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$** : Effectuez le déterminant
$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & a & d \\ \overrightarrow{j} & b & e \\ \overrightarrow{k} & c & f \end{vmatrix}$

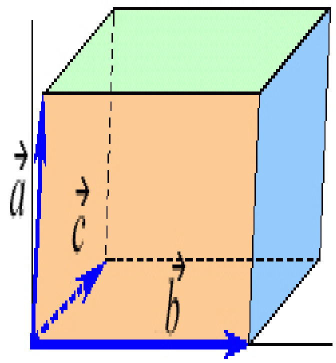
On donne les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ Calculez et comparez :
1) $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$ 2) $\overrightarrow{u} \wedge (2\overrightarrow{v})$, $(2\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v}$ et $2(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$
3) $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$ et $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w})$ 4) $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$ et $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w}$
Trés important : Le produit vectoriel n'existe pas en 2 dimensions.

6.10 Le produit mixte

On appelle produit mixte de trois vecteurs de dimension 3 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$, pris dans cet ordre, le nombre reel noté $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$ défini par $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = \overrightarrow{a}(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c})$.

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$$

Propriétés du produit mixte :
1) $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$= volume signé du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$



2) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont coplanaires.
3) $\vec{a}(\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b})\vec{c}$
4) Un produit mixte est invariant dans une permutation circulaire de ses vecteurs :
$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$
5) Un produit mixte change de signe quand on permute deux vecteurs : $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$
On donne les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$
Calculez $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, $[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$, $[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}]$ et $[\vec{b}, \vec{a}, \vec{b}]$.

Bibliographie

[1] *Allab K.* Elément d.Analyse. Fonctions d.une variable réelle. Publications Universitaires.

[2] *Piskounov N.* Calcul Différentiel et intégral Tome 1. Edition Mir.

[3] *J-P. Ramis, A. Warusfel.* Mathematiques tout en un pour la licence.