Correction EMD Systèmes Asservis

3ème Année Licence Electromécanique

Mr: AZaiz

Exercice 1 (10 pts)

Décomposons la fonction sinus en une combinaison d'exponentielles complexes :

$$s(t) = \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

Utilisons la définition de la transformée de Laplace pour calculer S(p) ou S(s) :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^{+\infty} \sin \omega t\, e^{-pt}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-pt}\, dt$$

$$S(p) = \frac{1}{2j}\int_0^{+\infty} e^{j\omega t}\, e^{-pt}\, dt - \frac{1}{2j}\int_0^{+\infty} e^{-j\omega t}\, e^{-pt}\, dt$$

$$S(p) = \frac{1}{2j}\int_0^{+\infty} e^{-(p-j\omega)t}\, dt - \frac{1}{2j}\int_0^{+\infty} e^{-(p+j\omega)t}\, dt$$

$$S(p) = \frac{1}{2j}\left[\frac{e^{-(p-j\omega)t}}{-(p-j\omega)}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2j}\left[\frac{e^{-(p+j\omega)t}}{-(p+j\omega)}\right]_0^{+\infty}$$

$$S(p) = \frac{1}{2j}\left[0 - \frac{1}{-(p-j\omega)}\right] - \frac{1}{2j}\left[0 - \frac{1}{-(p+j\omega)}\right]$$

$$S(p) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{(p-j\omega)} - \frac{1}{(p+j\omega)}\right]$$

$$S(p) = \frac{1}{2j}\left[\frac{(p+j\omega)-(p-j\omega)}{(p-j\omega)(p+j\omega)}\right]$$

$$S(p) = \frac{1}{2j}\left[\frac{2j\omega}{p^2+\omega^2}\right] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

Exercice 2 (10 pts)

Nous pouvons représenter le signal f(t) par la somme de deux signaux :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = Au(t) - Au(t-T)$$

où

- $f_1(t) = Au(t)$ est l'échelon unité d'amplitude A débutant à l'instant 0.
- $f_2(t) = Au(t - T)$ est l'échelon unité d'amplitude A débutant à l'instant T.

En utilisant la linéarité de la transformée de Laplace, on obtient :

$$F(p) = F_1(p) + F_2(p)$$

A partir de la table, on :

$F_1(p) = \dfrac{A}{p}$ et l'utisssation du théorème du retard donne $F_2(p) = \dfrac{A}{p} e^{-pT}$

d'où $F(p) = \dfrac{A}{p}\left(1 - e^{-pT}\right)$

Suite Correction En 1 systèmes asservis
3ème année Licence Electromécanique

Exercice 3 (7pts)

$$F(s)=\frac{3}{s^3+5s^2+6s}=\frac{3}{s(s+3)(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{s+2}$$

$$A=\left.\frac{3}{s(s+3)(s+2)}s\right|_{s=0}=\frac{1}{2}\qquad B=\left.\frac{3}{s(s+3)(s+2)}(s+3)\right|_{s=-3}=1$$

$$C=\left.\frac{3}{s(s+3)(s+2)}(s+2)\right|_{s=-2}=-\frac{3}{2}$$

$$d'où\quad F(s)=\frac{1}{2s}+\frac{1}{s+3}-\frac{3}{2(s+2)}$$

En utilisant la table de la transformée de Laplace, on obtient :

$$f(t)=\left[\frac{1}{2}+e^{-3t}-\frac{3}{2}e^{-2t}\right]u(t)$$

Exercice 4 (8pts)

On détermine la fonction de transfert du système en appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation :

$$TpS(p)+S(p)=KE(p)$$

La fonction de transfert G(p) est donnée par

$$G(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{Tp+1}$$

On déduit la transformée de Lapalce du signal de sortie s(t) avec e(t) = u(t) (E(p) = 1/p) :

$$E(p)=\frac{1}{p}\quad\Rightarrow\quad S(p)=\frac{K}{Tp+1}\cdot\frac{1}{p}=\frac{K}{p(Tp+1)}$$

Le théorème de la valeur finale indique que

$$\lim_{t\to+\infty}s(t)=\lim_{p\to 0}pS(p)=\lim_{p\to 0}\frac{pK}{p(Tp+1)}=K$$

La transformée de Laplace inverse de S(p) est donnée par la table de la transformée de Laplace :

$$S(p)=\frac{K}{p(Tp+1)}\quad\Rightarrow\quad s(t)=K\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

On obtient

$$\lim_{t\to+\infty}s(t)=K.$$

La valeur t_0 pour laquelle la sortie s(t) atteint 95% de sa valeur finale est obtenue à partir de l'expression :

$$K\left(1-e^{-\frac{t_0}{T}}\right)=0,95K$$

$$1-e^{-\frac{t_0}{T}}=0,95$$

$$t_0=-\ln(0.05)T\approx 3T$$