Corrigé

Questions du cours :

1. Dans la méthode du gradient à pas fixe le pas est fixé constant dans chaque itération par contre dans la méthode du gradient à pas optimal le pas est déterminé en minimisant une fonction à une seule variable (le pas) à chaque itération ce qui implique que la méthode du gradient à pas optimal converge rapidement par rapport à la méthode du gradient à pas fixe (1,5 pt).
2. L'inconvénient de la méthode de Newton est dans le choix du point initial de démarrage, en pratique il faut tourner le programme du gradient à pas optimal ou à pas fixe et prendre par exemple la 3ième itération comme point initial (1pt).
3. La méthode de Newton à chaque itération calcule l'inverse d'une matrice pour déterminer la solution, par contre la méthode Quasi-Newton approxime l'inverse de cette matrice par des suite de matrices (1pt).
4. La nature du minimum dépend de la matrice Q car dans le cas quadratique : $f(x) = x^T Qx - b^T x$, $f'(x) = Qx - b$ et $f''(x) = Q$ qui est la matrice hessienne (1,5 pt).

Exercice 1

1. Posons $g = f'(x) = x^2 - 10$ ensuite il faut vérifier que g est unimodale sur l'intervalle $[3, 3.25]$ c-à-d $g(3) \times g(3.25) = (-1) \times (0.56) = -0.56$ donc g est unimodal sur $[3, 3.25]$ (1pt)
2. L'algorithme de la méthode de dichotomie (1pt)

Algorithme 1 Méthode de dichotomie

— Saisir$a$, b, ε
— Tant que b–$a \geq \varepsilon$
— m prend la valeur $(a + b)/2$
— Si $f(a) \times f(m) \leq 0$
— Alors b prend la valeur m
— Sinon a prend la valeur m
— Fin Si Fin Tant que
— Afficher a, b

Application :

on a : $3.25 - 3 = 0.25 > 0.035$ donc
$m = \frac{3.25+3}{2} = 3.125$, $g(3) \times g(3.125) = 0.23 > 0$ donc $a = m$, Alors $[a_1\, b_1] = [3.125\, 3.25]$ (1pt)
$3.25 - 3.125 = 0.125 > 0.035$ donc $m_1 = \frac{3.125+3.25}{2} = 3.1875$, $g(3.125) \times g(3.1875) = -0.23 \times 0.16 < 0$ donc $b_1 = m_1$, Alors $[a_2\, b_2] = [3.125\, 3.1875]$ (1pt)

$3.1875 - 3.125 = 0.0625 > 0.035$, $m_2 = \frac{3.125+3.1875}{2} = 3.1562$, $g(3.125) \times g(3.1562) = -0.23 \times -0.038 > 0$, donc $a_2 = m_2$, Alors $[a_3\, b_3] = [3.1562\, 3.1875]$ (1pt)
$3.1875 - 3.1562 = 0.0313 < 0.035$ Fin des calculs.

Exercice 2

1. Deux réponses possibles (a) ou (b) (1pt) :
   (a) $g(x,y) = (\frac{x+y}{\sqrt{2}})^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}||(x,y)||^2$,
   donc lorsque $||(x,y)|| \to +\infty$, $g(x,y) \to +\infty$, alors g est coercive.
   (b) si $||(x,y)|| \to +\infty$, $g(x,y) \to +\infty$, si on prend $(x,y) = (0,n)$ donc $g(0,n) = n^2$ lorsque $||(0,n)|| = n \to +\infty$, $g(0,n) \to +\infty$, alors g est coercive.
2. La matrice hessienne de g en tout point $x \in \mathbb{R}^2$ est égal à $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Cette matrice est définie positive (les valeurs propres : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ sont positives) et la matrice ne dépend pas de (x,y), donc g est strictement convexe (2pts).
3. g est continue et coercive donc possède au moins un minimum sur $\mathbb{R}^2$. De plus, g est strictement convexe donc ce minimum est unique. Ce minimum est à rechercher parmi les points critiques : ceux ci sont tels que :
$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases}$$
   le point $(x,y) = (0,0)$ est le minimum de la fonction g (1pt).
4. X_2 est l'intersection entre les deux ensembles $x^2 + y^2 \leq 4$ et $x + y \geq 2$, le tracé est donnée par la figure ci-dessous

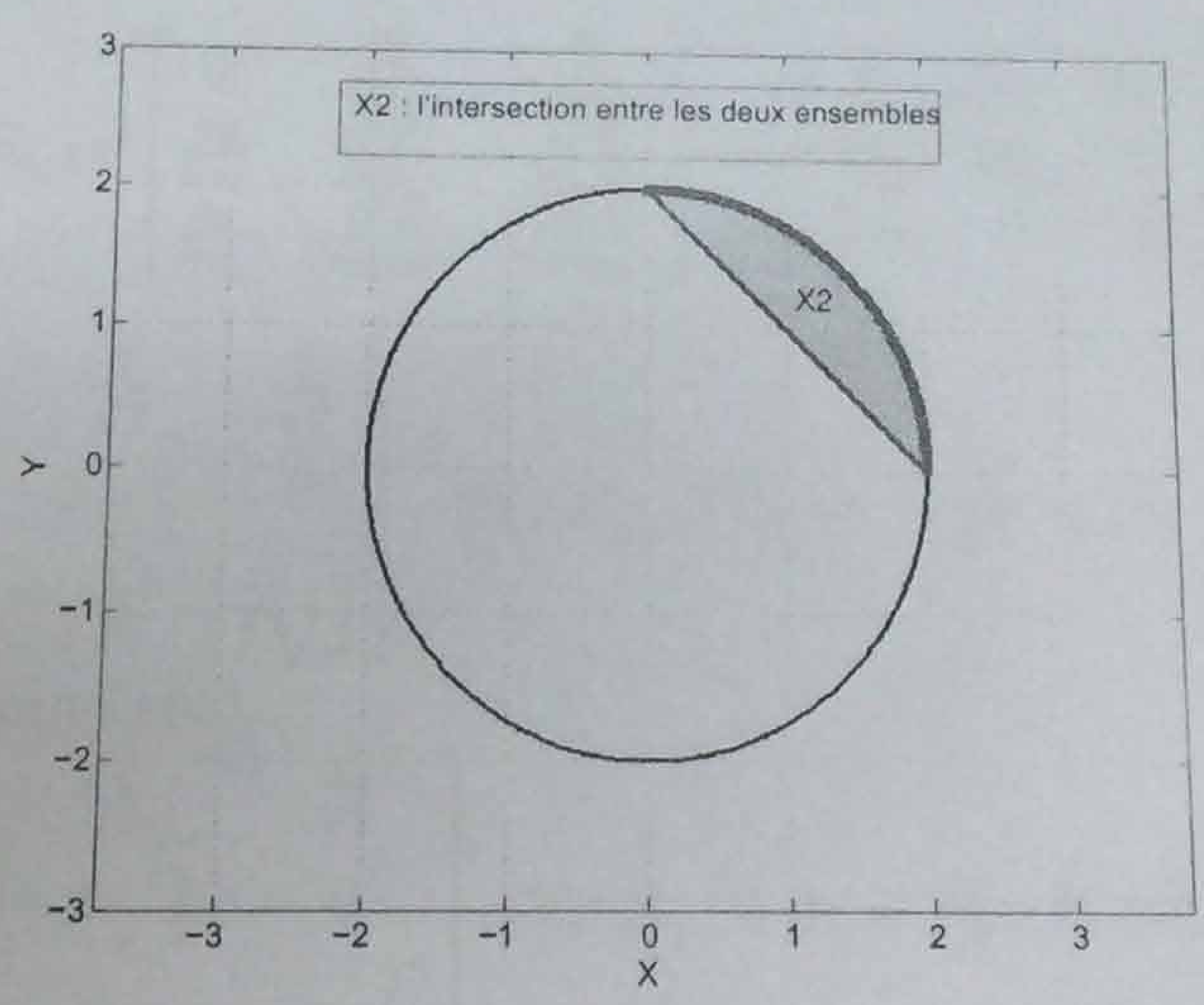

FIGURE 1 – L'ensemble X2 en couleur verte

si on prend deux points arbitraires de ce ensemble le segment reliant les deux points appartient au X_2, donc l'ensemble X_2 est convexe (1pt).

Exercice 3

On peut transformer le problème comme suivant :

$$Minimiser\ f(x) = -x_1 - x_2$$

$$S.C\ :\ g(x)\ :\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

Le lagrangien est donné par F (1pt) :

$$F(x_1, x_2, \lambda) = f(x) + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1),$$

on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -1 + 2\lambda x_1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -1 + 2\lambda x_2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

(1) et (2) donnent : $x_1 = x_2 = \frac{1}{2\lambda}$, remplaçant dans (3) on trouve : $\lambda_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\lambda_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$, donc on trouve deux points stationnaires : $(x^*_{(1)}, \lambda_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$, et $(x^*_{(2)}, \lambda_2) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}})$ (1pt)

la matrice hessienne bordée H_b(1pt) :

$$H_b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & 2\lambda & 0 \\ 2x_2 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

$H_b(x^*_{(1)}, \lambda_1) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 2\sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$, $|H_b(x^*_{(1)}, \lambda_1)| = -\frac{8}{\sqrt{2}} < 0$, donc le point $(x^*_{(1)}, \lambda_1)$ correspond à un minimum (1pt).

$H_b(x^*_{(2)}, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{2}} & -2\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{2}} & 0 & -2\sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$,$|H_b(x^*_{(2)}, \lambda_2)| = \frac{8}{\sqrt{2}}$>0, donc le point $(x^*_{(2)}, \lambda_2)$ correspond à un maximum (1pt).

d'où le point $(x^*_{(1)}, \lambda_1)$ correspond à un maximum du problème (P).

 Mr: Zatla.