Université Djillali Liabès de Sidi Bel-Abbès Faculté de Génie Electrique Département d'Automatique 2017 / 2018	1ère année Master « Automatique et Systèmes » Enseignant : Pr. FELLAH Mohammed-Karim	Examen : Systèmes Linéaires Multivariables : 22 Janvier 2018 : 1h 30mn

Exercice 1 (10 pts)

Soit le système dont la matrice d'état A est :

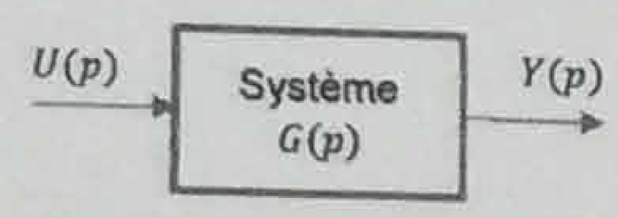
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

1- Montrer que cette matrice est inversible.
2- Calculer sa matrice inverse A^{-1}.
3- Calculer $A.A^{-1}$.

Exercice 2 (10 pts)

Soit un système défini par sa fonction de transfert $G(p)$:

$$G(p) = \frac{6}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} = \frac{6}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$



1- Déterminez sa représentation interne sous forme canonique de commandabilité.
2- En déduire sa représentation interne sous forme canonique d'observabilité.
3- Déterminez sa représentation interne sous forme canonique diagonale.

Remarque : il est nécessaire de terminer les calculs et ne pas se contenter de calculs intermédiaires.

Solutions

Exercice 1 (10 pts)

Soit le système dont la matrice d'état A est : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

1- Montrons que cette matrice est inversible : (2 pts)

Pour cela, nous devons montrer qu'elle n'est pas singulière, c'est-à-dire que son déterminant n'est pas nul.

Calculons le déterminant de A :

$$\text{dét}(A) = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= (9-16) - 2(3-4) + 3(4-3) = -7 + 2 + 3$$
$$\text{dét}(A) = -2$$

$\text{dét}(A) \neq 0$: La matrice n'est pas singulière. Elle est donc inversible.

2- Calculons l'inverse de la matrice A : (6 pts)

Formons la matrice des cofacteurs de A :

$$\text{Cofac}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{Cofac}(A) = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Formons la matrice adjointe de A : $\text{adj}(A)$
$\text{adj}(A)$ = transposée de $\text{Cofac}(A)$:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice inverse est alors :

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\text{dét}(A)} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

3- Calculons $A.A^{-1}$: (2 pts)

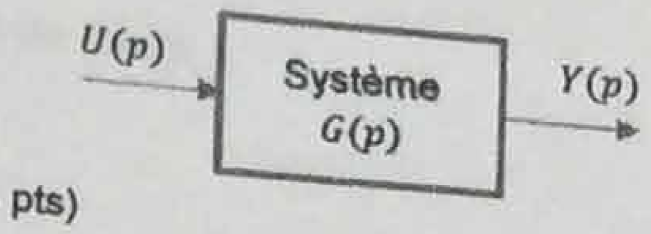
$$A.A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7-2-3 & -6+0+6 & 1+2-3 \\ 7-3-4 & -6+0+8 & 1+3-4 \\ 7-4-3 & -6+0+6 & 1+4-3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A.A^{-1} = I$ (Confirmation que A est inversible)

Exercice 2 (10 pts)

Soit le système dont la fonction de transfert vaut $G(p)$:

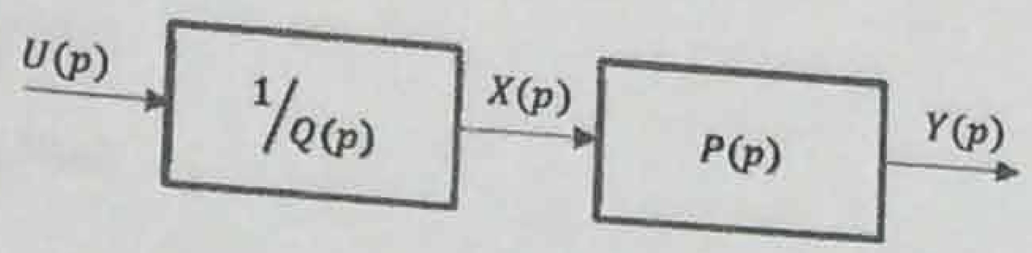
$$G(p) = \frac{6}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} = \frac{P(p)}{Q(p)}$$



1- Détermination de la forme canonique de commandabilité : (4 pts)

Décomposons la fonction de transfert de la manière suivante :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{Y(p)}{X(p)} \cdot \frac{X(p)}{U(p)} = \frac{P(p)}{Q(p)}$$



Posons :

$$\begin{cases} P(p) = \dfrac{Y(p)}{X(p)} = 6 & ❶ \\ \dfrac{1}{Q(p)} = \dfrac{X(p)}{U(p)} = \dfrac{1}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} & ❷ \end{cases}$$

De ❷ :

$$[p^3 + 6p^2 + 11p + 6]\, X(p) = U(p)$$
$$\Rightarrow \dddot{x}(t) + 6\ddot{x}(t) + 11\dot{x}(t) + 6x(t) = u(t)$$
$$\Rightarrow \dddot{x} + 6\ddot{x} + 11\dot{x} + 6x = u$$

Soit le vecteur d'état :

$$X \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Choisissons :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = \ddot{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + u \end{vmatrix}$$

C'est-à-dire :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

De ❶ :

$$Y(p) = 6\,X(p)$$
$$\Rightarrow y(t) = 6\,x(t)$$
$$\Rightarrow y = 6x = 6x_1$$

C'est-à-dire :

$$Y = [1 \quad 0 \quad 0]X + [0]u$$

La représentation d'état recherchée est alors :

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ Y = [6 \quad 0 \quad 0]X + [0]u \end{cases}$$

Elle correspond donc bien à la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{6}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}$$

2- Déduction de la forme canonique d'observabilité : (2 pts)

La représentation d'état canonique de commandabilité a été déterminée ci-dessus :

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ Y = [6 \quad 0 \quad 0]X + [0]u \end{cases}$$

Avec :

$$A_{FCC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \qquad B_{FCC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C_{FCC} = [6 \quad 0 \quad 0] \qquad D_{FCC} = [0]$$

FCC : Forme Canonique de Commandabilité

La représentation d'état canonique d'observabilité correspondante peut être facilement déduite de la représentation d'état canonique de commandabilité ainsi définie, en utilisant les relations suivantes :

$$\begin{vmatrix} A_{FCO} = (A_{FCC})^T \\ B_{FCO} = (C_{FCC})^T \\ C_{FCO} = (B_{FCC})^T \\ D_{FCO} = (D_{FCC})^T \end{vmatrix}$$

FCO : Forme Canonique d'Observabilité

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ Y = [0 \quad 0 \quad 1]X + [0]u \end{cases}$$

3- Détermination de la forme canonique diagonale : (4 pts)

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{6}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} = \frac{6}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

Les pôles de $G(p)$ sont réels et distincts. Ecrivons $G(p)$ sous la forme d'une somme d'éléments simples :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+3}$$

$$\begin{cases} A = \left[\dfrac{6}{(p+1)(p+2)(p+3)}(p+1)\right]_{p=-1} = \left[\dfrac{6}{(p+2)(p+3)}\right]_{p=-1} = 3 \\ B = \left[\dfrac{6}{(p+1)(p+2)(p+3)}(p+2)\right]_{p=-2} = \left[\dfrac{6}{(p+1)(p+3)}\right]_{p=-2} = -6 \\ C = \left[\dfrac{6}{(p+1)(p+2)(p+3)}(p+3)\right]_{p=-3} = \left[\dfrac{6}{(p+1)(p+2)}\right]_{p=-3} = 3 \end{cases}$$

D'où :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{6}{(p+1)(p+2)(p+3)} = 3\frac{1}{p+1} - 6\frac{1}{p+2} + 3\frac{1}{p+3}$$

Définissons les variables d'état :

$$Y(p) = 3\underbrace{\frac{1}{p+1}U(p)}_{X_1(p)} - 6\underbrace{\frac{1}{p+2}U(p)}_{X_2(p)} + 3\underbrace{\frac{1}{p+3}U(p)}_{X_3(p)} \qquad ❶$$

$$Y(p) = \underbrace{3}_{c_1} X_1(p) + \underbrace{(-6)}_{c_2} X_2(p) + \underbrace{3}_{c_0} U(p)$$

En revenant aux équations temporelles, on obtient pour l'équation de sortie :

$$y = 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 \quad ❷$$

De l'équation ❶, on obtient :

$$\begin{cases} X_1(p) = \dfrac{1}{p+1} U(p) \\ X_2(p) = \dfrac{1}{p+2} U(p) \\ X_3(p) = \dfrac{1}{p+3} U(p) \end{cases}$$

Ce qui peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} pX_1(p) = -X_1(p) + U(p) \\ pX_2(p) = -2X_2(p) + U(p) \\ pX_3(p) = -3X_3(p) + U(p) \end{cases}$$

En prenant la transformée inverse de Laplace des 3 équations précédentes, il vient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u \\ \dot{x}_3 = -3x_3 + u \end{cases} \quad ❸$$

Les équations ❷ et ❸ permettent d'afficher la représentation d'état sous forme canonique diagonale :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]u \end{cases}$$