REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES
FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mme: Tabet Derraz

Corrigé de l'examen de : Traitement de signal
1ère Année Master Automatique

Questions de cours

1 - Du point de vue physique, la convolution est le fait qu'un dispositif voit son signal de sortie décalé d'une valeur centrale par rapport à l'original. (1)

2 - Mathématiquement, ce phénomène s'écrit sous la forme suivante :
- Convoluons deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, on obtient :

$$x(t) * y(t) = z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau) \cdot d\tau \quad (1)$$

avec τ : le décalage temporel qui fait dédoubler le signal par rapport à son état initial.

3 - Par définition, et si l'on veut représenter une convolution on doit obéir aux étapes suivantes : (1)

* A partir des signaux à convoluer, on doit :
  - fixer un signal et inverser l'autre après avoir remplacé t (le temps) par τ (le décalage).
  - On fait balader le signal inversé sur l'axe des temps, c'est à dire décaler ce signal d'une valeur t.

Questions de cours : suite

4- Un filtre analogique sert à filtrer les signaux indésirables par rapport à leurs fréquences.

On pourrait citer différents types de filtres analogiques, comme les filtres passe-bas, passe haut, ... (1)

5- Il y a des conditions mathématiques qui assurent qu'une fonction possède une transformation de Fourier. Mais en théorie de signal, si un signal admet une énergie finie, il peut avoir un spectre dans le domaine fréquentiel et donc une transformée de Fourier. (1)

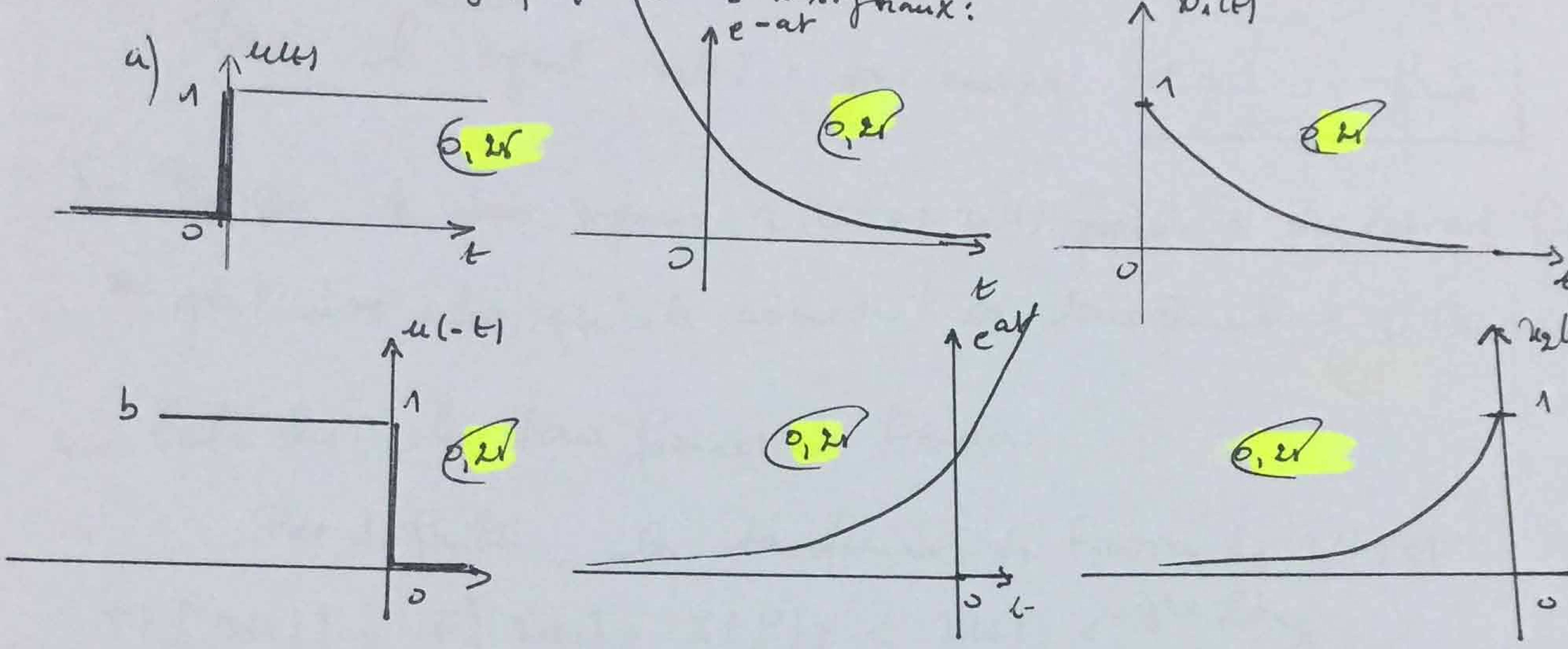
- janvier 2018 Corrigé de l'examen . Traitement de signal

1ère Année Master - Auto.

Exercice n°1:

a) $x_1(t) = e^{-at} . u(t)$ et b) $x_2(t) = e^{at} . u(-t)$

1- Représentation graphique des 2 signaux:



2- Calculons les énergies des deux signaux:

Définition de l'énergie: $E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt$: énergie totale d'un signal réel.

a - Calculons l'énergie du signal $x_1(t) = e^{-at} . u(t)$.

0,5 0,5

$$E_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2(t) . dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-at} . u(t)]^2 dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-2at} dt$$

$$= -\frac{1}{2a} \left[e^{-2at} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2a} \left[e^{-\infty} - e^0 \right]$$

0,5

Donc: $x_1(t)$ a pour énergie: $E_1 = \frac{1}{2a}$: finie.

b - Calculons l'énergie du signal $x_2(t) = e^{at} . u(-t)$

$$E_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{at} . u(-t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2at} dt$$

0,5

Exercice n° 1 (Suite 1) :

$$E_2 = \int_{-\infty}^{0} e^{2at} . dt = \frac{1}{2a} . e^{2at} \Big]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2a} \left[e^0 - e^{-\infty} \right] = \frac{1}{2a}$$ 0,5 0,5

Donc, le signal $x_2(t)$ a pour énergie : $\boxed{E = \frac{1}{2a} : \text{finie}}$

3- Puisque les deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ possèdent des énergies finies on peut dire alors qu'ils admettent des transformations de Fourier. 0,5

4- Calculons les transformées de Fourier :

Par définition, la transformée de Fourier de $x(t)$ est :

$$TF[x(t)] = F\{x(t)\} = X(f) = \langle x(t), e^{-j2\pi ft} \rangle$$

$$TF[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . e^{-j2\pi ft} dt$$

a- Transformée de Fourier de $x_1(t)$:

$$TF[x_1(t)] = X_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) . e^{-j2\pi ft} dt$$ 0,25

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} . u(t) . e^{-j2\pi ft} dt$$ 0,25

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{-at} . e^{-j2\pi ft} . 0 \, dt}_{=0} + \int_{0}^{+\infty} 1 . e^{-at} . e^{-j2\pi ft} dt$$ 0,25

Il reste :

$$X_1(f) = TF[x_1(t)] = \int_{0}^{+\infty} e^{-at} . e^{-j2\pi ft} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt$$ 0,25

$$= -\frac{1}{a+j2\pi f} \left[e^{-\infty} - e^0 \right] = \frac{1}{a+j2\pi f}$$ 0,25 0,25

$$\boxed{X_1(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} = TF[x_1(t)]}$$

...ia 2018

Corrigé examen : Traitement de Signal — A.U. 2017-18

M1 - Automatique

5/9

Exercice n° 1 : Suite 2

3- Calculons la transformée de Fourier du signal $x_2(t)$:

$$TF[x_2(t)] = X_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at} \cdot u(-t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt$$ 0,25

$$X_2(f) = \int_{-\infty}^{0} 1 \cdot e^{at} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} 0 \cdot e^{at} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt}_{=0}$$ 0,25

(voir représentation graphique de $u(-t)$)

Reste :

$$X_2(f) = \int_{-\infty}^{0} 1 \cdot e^{at} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a - j2\pi f)t}\, dt$$ 0,25 0,25

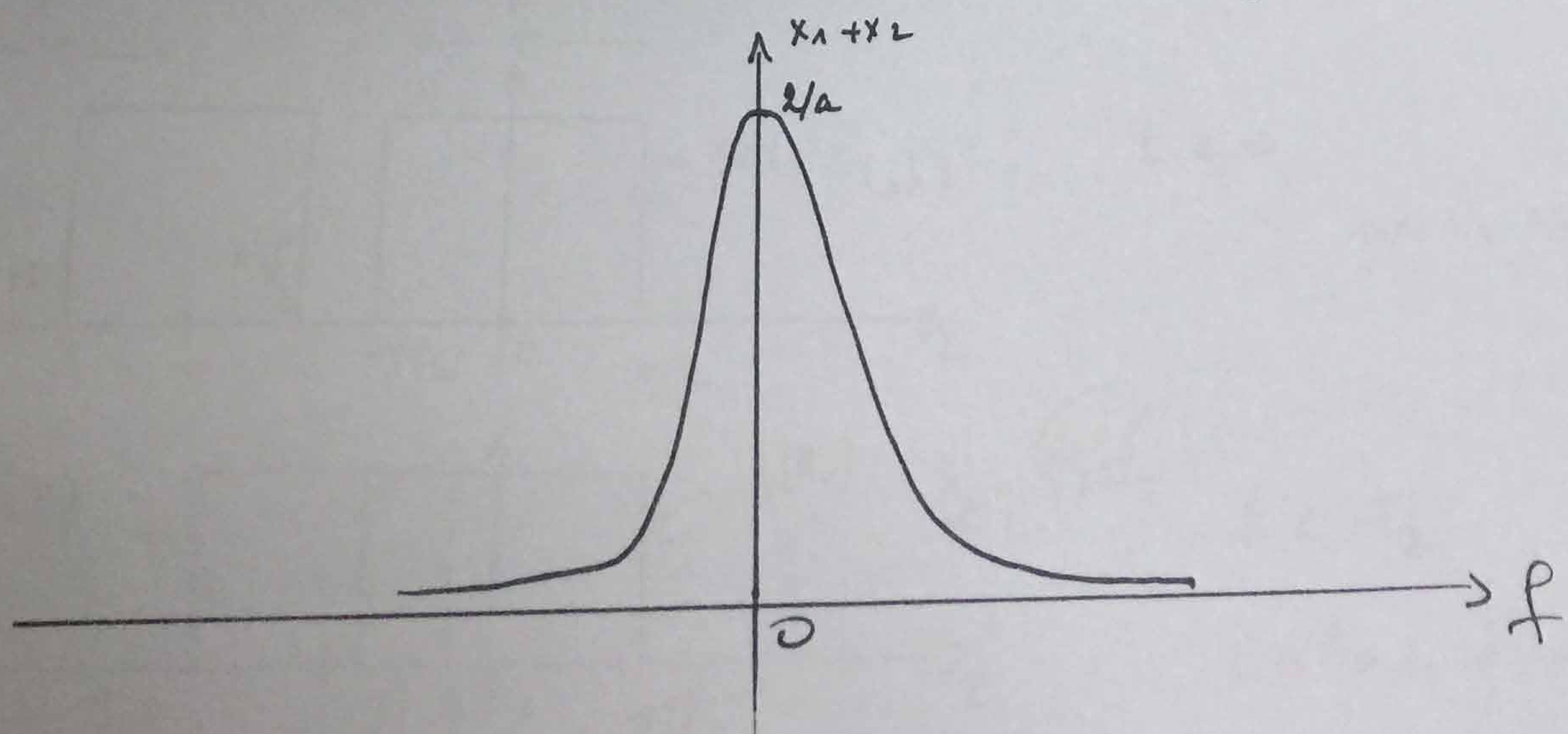
$$X_2(f) = \frac{1}{a - j2\pi f} \cdot e^{(a-j2\pi f)t}\Big]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{a - j2\pi f}\left[\overset{\to 1}{e^{0}} - \underset{\to 0}{e^{-\infty}}\right]$$ 0,25

Donc : la transf. de Fourier du signal $x_2(t)$ est :

$$\boxed{X_2(f) = \frac{1}{a - j2\pi f}}$$ 0,25

4- Représentation graphique de $X_1(f)$ et $X_2(f)$

$$X_1(f) + X_2(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} + \frac{1}{a - j2\pi f} = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$



1 Janvier 2018

Corrigé de l'EMD n° 1.

Traitement de signal M1 - Auto

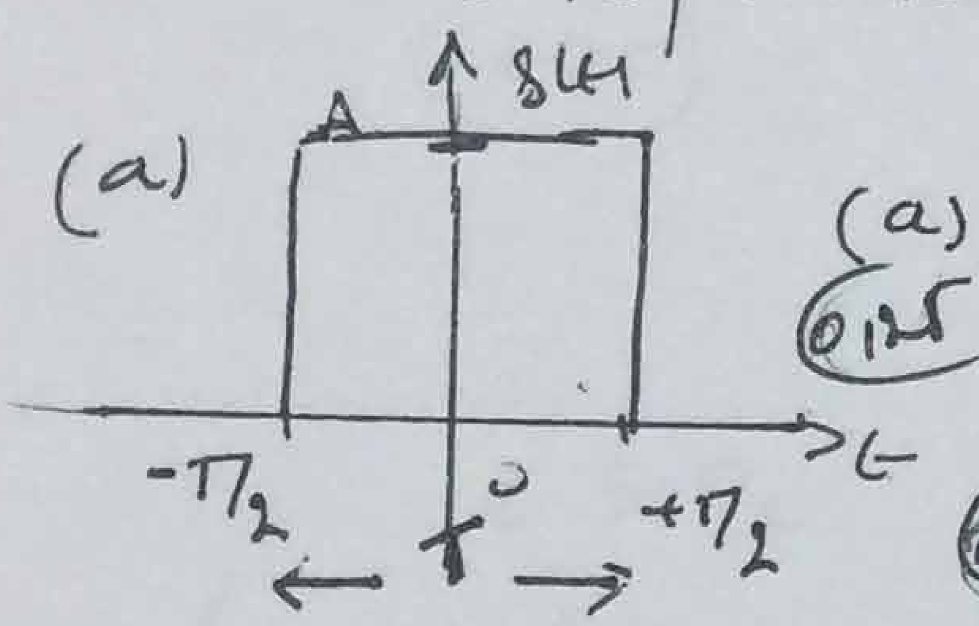
Exercice n° 2 :

Soit $s(t) = A \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

- Convoluons cette fonction, ce signal avec lui-même :

$$s(t) * s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) \cdot s(t-\tau) \cdot d\tau \quad 0{,}25$$

- Représentons graphiquement ce signal :

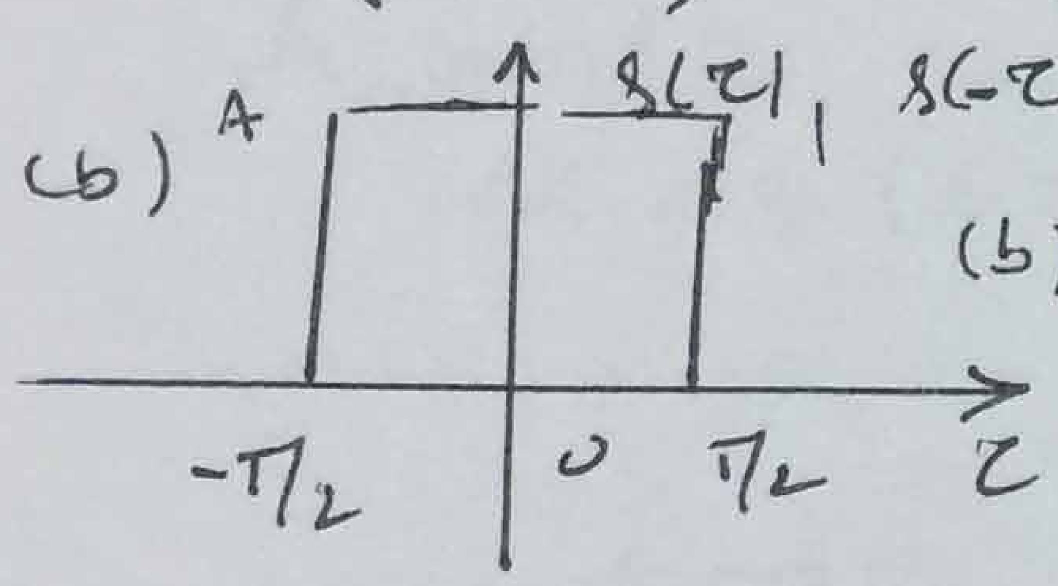


(a) 0,125

0,25

$$s(t) = A \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

signal rectangulaire, d'amplitude A centré en $t = 0$, de durée T

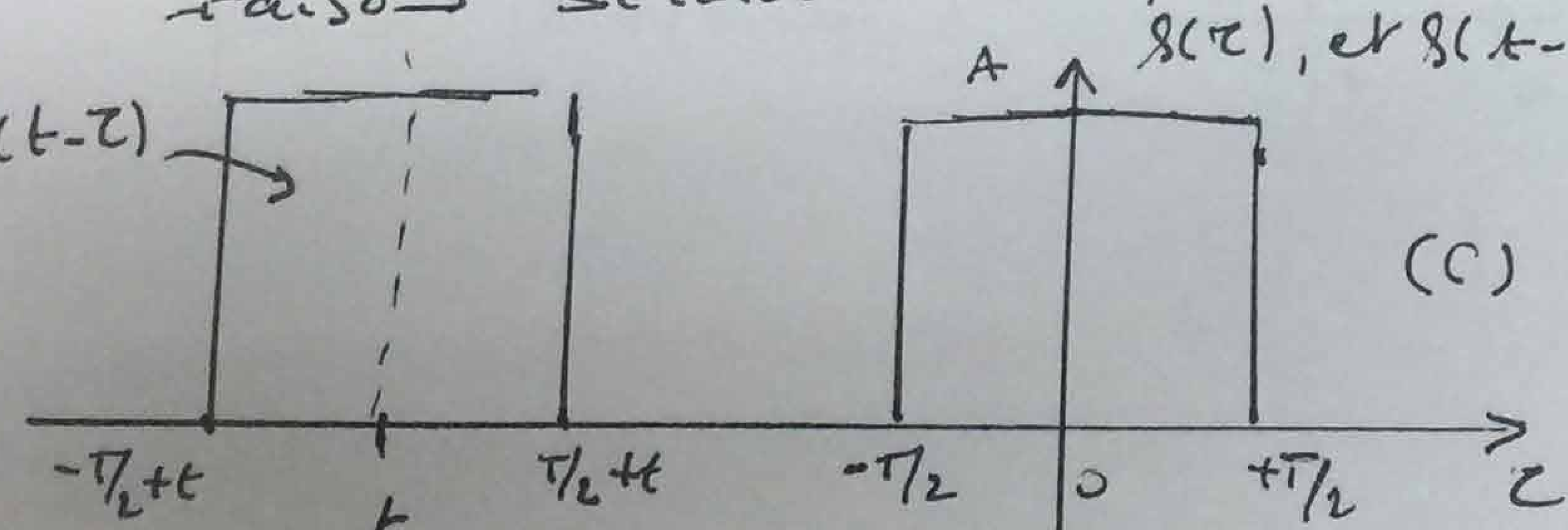


(b)

on remplace t, par $-\tau$

sur la fig (b), on a $s(\tau)$ et $s(-\tau)$.

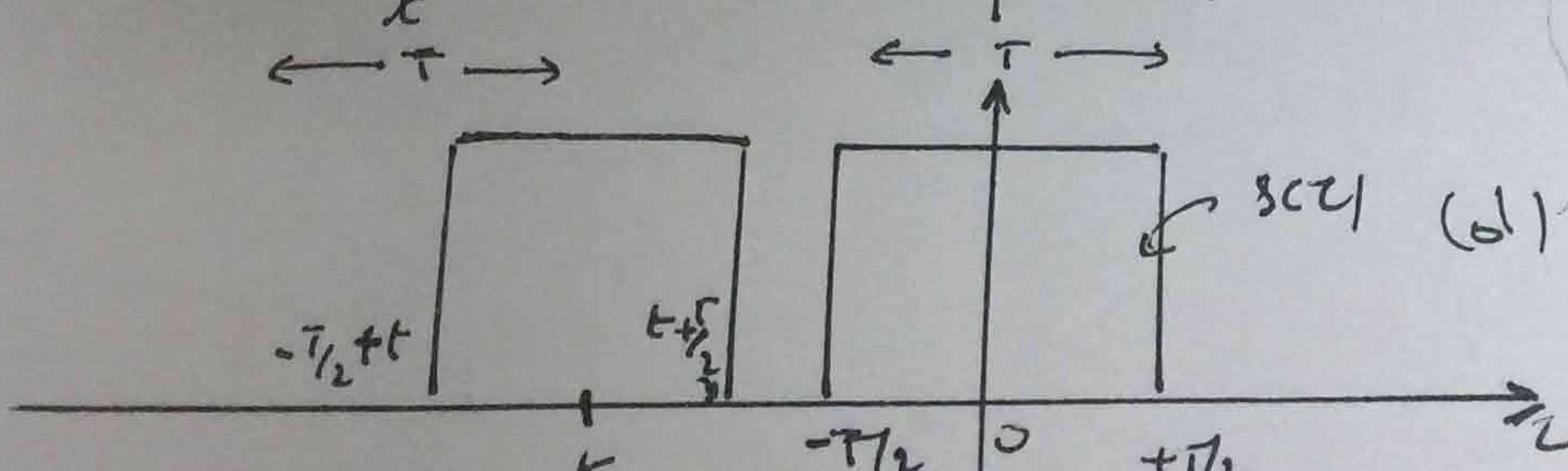
Faisons décaler $s(-\tau)$ d'une valeur t.



(c) $t \ll 0$

pas de convolution

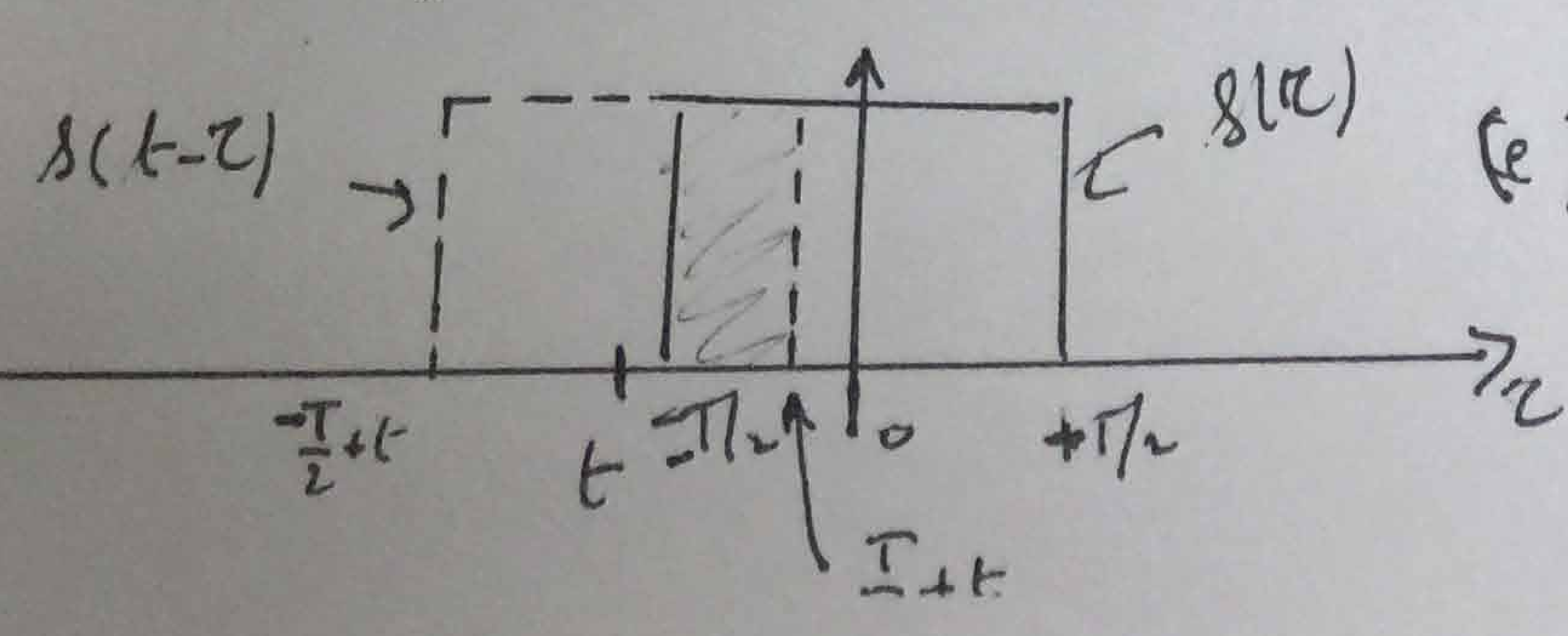
0,25



(d) $t < 0$

pas de convolution

0,25



(e) $t < -T/2$

Existance d'une convolution

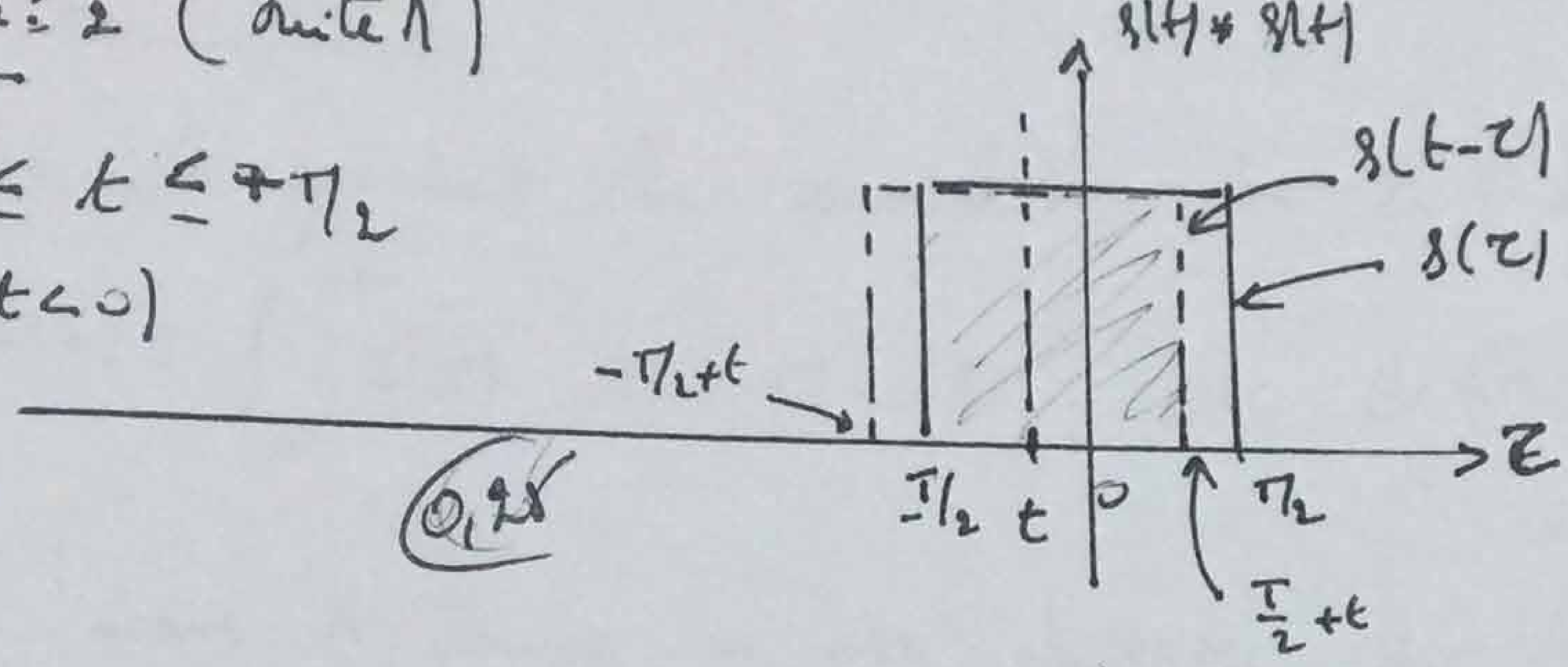
Corrigé EMD trait. sig.

M1 - Auto.

Exercice n° 2 (suite 1)

$-T/2 \leq t \leq +T/2$
$(t<0)$

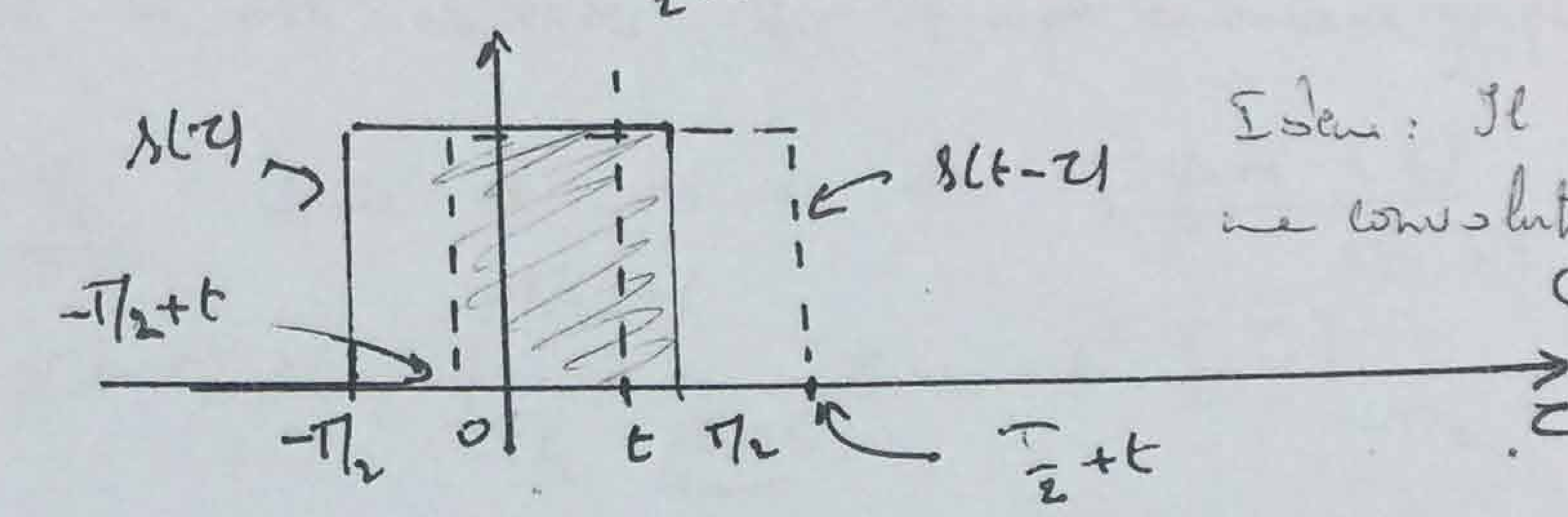
0,25



Il y a une convolution (f) $(-T<t)$

$-\frac{T}{2} \leq t \leq T/2$
$(t>0)$

0,25

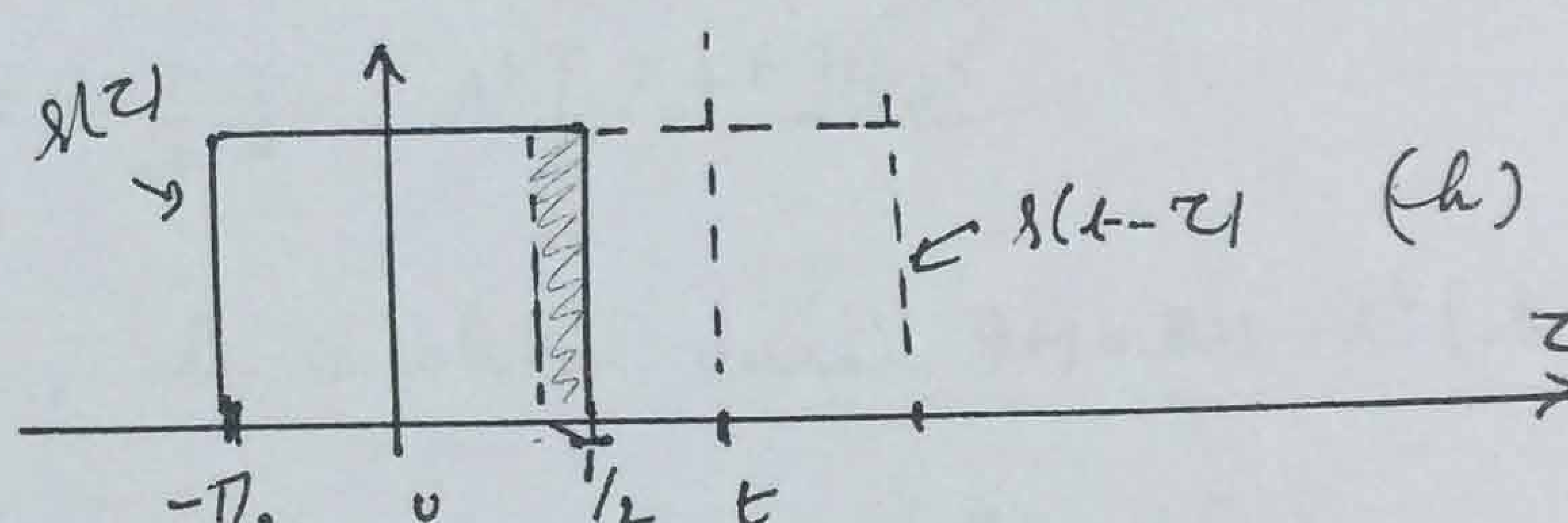


Idem : Il y a une convolution. (g)

$t > T/2$

la convolution existe ici aussi $(t>0)$

0,25

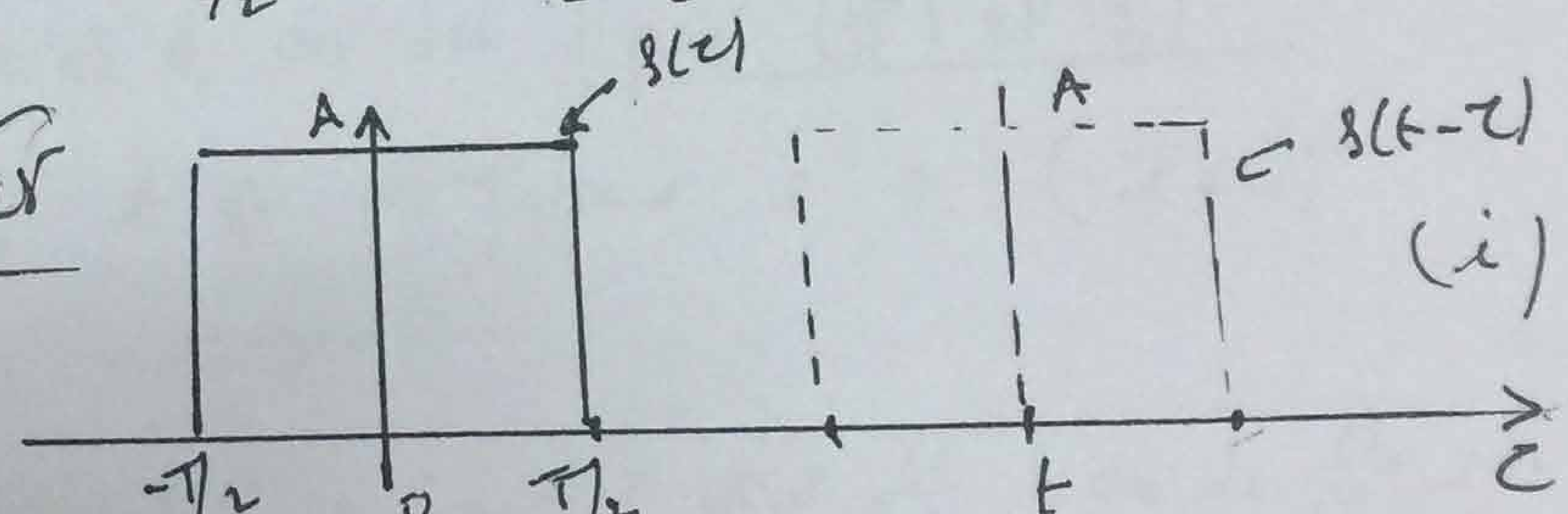


(h)

$t >> T/2$

plus de convolution !

0,25



(i)

janvier 2018 Corrigé examen traitement de signal A.U. 2017-18

M1 - Auto.

Exercice n° 2 (suite)

- Calculons le produit de convolution de $s(t)$ avec lui même :

$$s(t) * s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau).\ s(t-\tau).\ d\tau$$ par définition que l'on appelle auto - convolution

l'évolution dans le temps a été observée sur les représentations graphiques.

1er cas: si $t < -T/2$ dans le cas de la figure (e)

$$s(t) * s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau).\ s(t-\tau)\ d\tau = \int_{-T/2}^{T/2+t} A.A\ .d\tau = A^2\ [\tau]_{-T/2}^{T/2+t}$$ 0,25

$$s(t) * s(t) = A^2 \left[\frac{T}{2} + t + \frac{T}{2} \right] = A^2 [T + t]$$ 0,25

pour : $t < -T/2$, la convolution donne: $s(t) * s(t) = A^2 (t + T)$

2e cas: $-T/2 \leq t \leq T/2$ c'est le cas des figures (f) et (g)

pour la figure (f), t est inférieur à 0 $(t < 0)$

pour la fig. (g), $t > 0$.

le calcul se fait exactement pareil pour les 2 cas de figures

fig. (f) : $$s(t) * s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau).\ s(t-\tau)\ d\tau = \int_{-T/2}^{T/2+t} A^2\ d\tau = A^2 [\tau]_{-T/2}^{T/2+t}$$ 0,25

$$s(t) * s(t) = A^2 \left[\frac{T}{2} + t + \frac{T}{2} \right] = A^2 [t + T]$$ 0,25

fig. (g) : $$s(t) * s(t) = \int_{-T/2+t}^{T/2} A^2 .\ d\tau = A^2 [\tau]_{-T/2+t}^{T/2} = A^2 \left[\frac{T}{2} + \frac{T}{2} - t \right]$$ 0,25 0,25

$$s(t) * s(t) = A^2 [-t + T]$$

Suite exercice n°2 : (Suite 3)

3e cas : $t > T/2$: la figure (h) représente bien ce cas.

$$s(t) * s(t) = \int_{-T/2+t}^{T/2} A^2 \, d\tau = A^2 . \tau \Big]_{-T/2+t}^{T/2} = A^2 \left[\frac{T}{2} + \frac{T}{2} - t \right]$$

0,2pt

$$s(t) * s(t) = A^2 [-t+T] \quad \text{pour } t > T/2.$$

0,2pt

Récapitulatif :

pas noté !

1er cas : $t < -T/2$: $s(t) * s(t) = A^2 [t+T]$

2e cas : $-T/2 \le t \le T/2$: a) $s(t) * s(t) = A^2 [t+T]$.

$A^2 [t+T]$ pente positive

b) $s(t) * s(t) = A^2 [-t+T]$

3e cas : $t > T/2$: $s(t) * s(t) = A^2 [-t+T]$.

$A^2 [-t+T]$ pente négative

On a donc deux segments : un de pente positive et le second de pente négative

0,2×4 = 1pt