Département d'Electronique
Faculté de Technologie
Université Djillali Liabes, Sidi bel Abbés

21 Janvier. 2018

Matière : Traitement avancé du signal

Epreuve : Master (1ére Année)
Durée: 1h 30mn

Exercice N°01

On considère le filtre numérique défini par la relation de récurrence suivante :

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n)$$

avec la condition initiale : $y(n) = 0$. pour $n < 0$.

1. Déterminer la fonction de transfert $H(z)$ du filtre défini par cette relation. Ce filtre est-il stable ? 02 points
2. En déduire l'expression suivante pour le module de sa réponse en fréquence : 01 points

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{1}{\frac{5}{4} - \cos(2\pi f)}}$$

Représenter l'allure de $|H(f)|^2$. 01 points

3. Calculer sa réponse impulsionnelle $h(n)$ de deux façons différentes : 02 points
   - en revenant à la définition de la réponse impulsionnelle :
   - en partant de $H(z)$.

   On rappelle que pour $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

4. On suppose que $X(n)$ est un signal aléatoire, stationnaire au second ordre, centré et de fonction d'autocorrélation :

$$R_X(k) = \begin{cases} 1 & si\ k = 0 \\ \frac{1}{2} & si\ k \pm 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

   Déterminer la densité spectrale de puissance $S_X(f)$ de la suite aléatoire $X(n)$. Représenter son allure. 02 points

5. Calculer la d.s.p. $S_Y(f)$ de la suite aléatoire $Y(n)$ observée en sortie du filtre. Représenter son allure. 02 points

Exercice N°02

On considère la fonction aléatoire $X(t) = f(t, A)$ où f est une fonction connue quelconque et A, une variable aléatoire de densité de probabilité $T_A(a)$ connue. On demande

a) de trouver l'expression de $m_X(t)$ et de $C_X(t, t')$, de même que $\sigma_X^2(t)$. 3 points

b) d'appliquer ce résultat à $X(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$ et $Y(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$, où φ est une variable de chance sur $[0, 2\pi]$. Déterminez aussi $C_{XY}(t, t')$. 01 points 06 points

Bonne chance

Corrigé de l'Epreuve du Master 1 : Instrumentation et Electronique des systèmes embarqués

Exercice N° 01.

Soit l'equation de récurrence suivante :

$$y(n) - \frac{1}{2}\, y(n-1) = x(n)$$

$y(n) = 0$ pour $n < 0$.

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

01) - $H(Z) = TZ\left[h(n)\right]$?

D'après l'equation de récurrence : $Y(Z) - \frac{1}{2} Z^{-1} Y(Z) = X(Z)$

$$Y(Z)\left[1 - \frac{1}{2} Z^{-1}\right] = X(Z) \Rightarrow$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} Z^{-1}} = \frac{Z}{Z - 1/2}.$$

$$\boxed{H(Z) = \frac{Z}{Z - 1/2}}$$

1 points

- Le filtre est stable car le pôle $Z = 1/2$ et $|Z| < 1$ le pôle est à l'interieur du Cercle unité

1 points

02) - La réponse en frequence $H(\omega) = H(Z)\big|_{Z = e^{j\omega}}$

et $H(f) = H(Z)\big|_{Z = e^{j2\pi f}}$.

$$H(f) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j2\pi f}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\left[\cos 2\pi f - j \sin 2\pi f\right]}$$

$$H(f) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\cos 2\pi f\right) - \frac{1}{2} j \sin 2\pi f}$$

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\cos 2\pi f\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2 2\pi f}}$$

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\cos^2 2\pi f - \cos 2\pi f + \frac{1}{4}\sin^2 2\pi f}}$$

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} - \cos 2\pi f}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos 2\pi f}}$$ $\boxed{1 \text{ point}}$

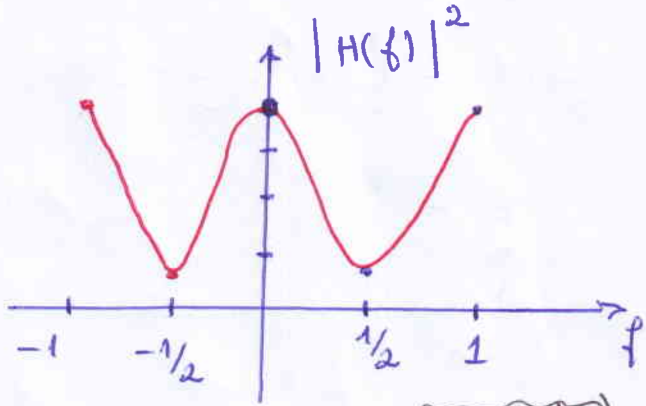
$$- |H(f)|^2 = \frac{1}{\frac{5}{4} - \cos 2\pi f}.$$

L'allure de $|H(f)|^2$.

à $f = 0 \rightarrow |H(f)|^2 = 4$

à $f = \pm \frac{1}{2} \rightarrow |H(f)|^2 = \frac{4}{9}$

à $f = \pm 1 \rightarrow |H(f)|^2 = 4$



$\boxed{1 \text{ point}}$

La réponse fréquentielle $|H(f)|^2$ est périodique de période 1.

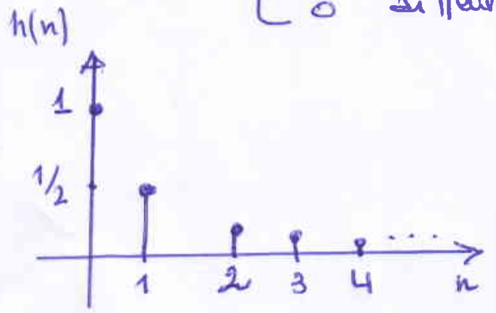
03) - La réponse impulsionnelle $h(n)$?

1e méthode : $H(Z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} Z^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} Z^{-1}\right)^n$

$$H(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n . Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) . Z^{-n}.$$

$$\Rightarrow \boxed{h(n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)} \qquad \text{telle que } u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$\boxed{1 \text{ point}}$



2eme méthode :

à partir de l'équation de récurrence.

$$y(n) - \tfrac{1}{2}\, y(n-1) = x(n)$$

$$y(n) = \tfrac{1}{2}\, y(n-1) + x(n)$$

$$y(0) = \tfrac{1}{2}\, y(-1) + x(0) = x(0) \quad (1) \qquad \text{à } n = 0$$

$$y(1) = \tfrac{1}{2}\, y(0) + x(1)$$

$$y(1) = \tfrac{1}{2} \cdot x(0) + x(1) \quad (2)$$

$$y(2) = \tfrac{1}{2} \cdot y(1) + x(2)$$

$$y(2) = \tfrac{1}{4} \cdot x(0) + \tfrac{1}{2} x(1) + x(2) = \tfrac{1}{2}\left[x(0) + x(1)\right] + x(2)$$

$$y(3) = \tfrac{1}{2}\, y(2) + x(3)$$

$$y(3) = \tfrac{1}{8}\, x(0) + \tfrac{1}{4}\, x(1) + \tfrac{1}{2} \cdot x(2) + x(3)$$

$$\vdots$$

$$y(n) = \frac{1}{2^n} \cdot x(0) + \frac{1}{2^{n-1}}\, x(1) + \frac{1}{2^{n-2}} \cdot x(2) + \cdots + x(n)$$

$$y(n) = \frac{1}{2^n} \cdot x(n) * \delta(n) + \frac{1}{2^n}\, x(n) * \delta(n-1) + \frac{1}{2^n}\, x(n) * \delta(n-2) +$$

$$\Rightarrow y(n) = x(n) * \left[\delta(n) + \tfrac{1}{2}\,\delta(n-1) + \tfrac{1}{4}\,\delta(n-2) + \cdots + \frac{1}{2^n}\,\delta(0)\right]$$

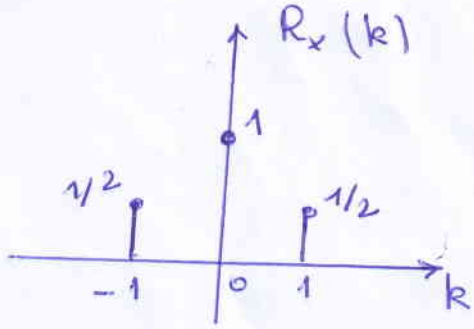
$$\Rightarrow h(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}\,\delta(n-1) + \frac{1}{4}\,\delta(n-2) + \cdots$$
$$\frac{1}{2^n}\,\delta(0)$$

(1 points)

$h(n) = \frac{1}{2^n}$. pour $n \geqslant 0$ $\Rightarrow h(n) = \frac{1}{2^n} \cdot u(n)$

04) - $X(n)$ est un signal aléatoire stationnaire au second ordre, centré $E[X(n)] = 0$ et de fonction d'auto corrélation

$$R_x(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 1/2 & \text{si } k = \pm 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



<u>La densité spectrale de puissance $S_x(f)$.</u>

Etant donné que la fonction d'autocorrélation est discrète donc on procède par la transformée de Fourier discrète.

$$S_x(f) = TF[R_x(k)] = \sum_{k=-1}^{1} R_x(k)\, e^{-j2\pi f k}$$

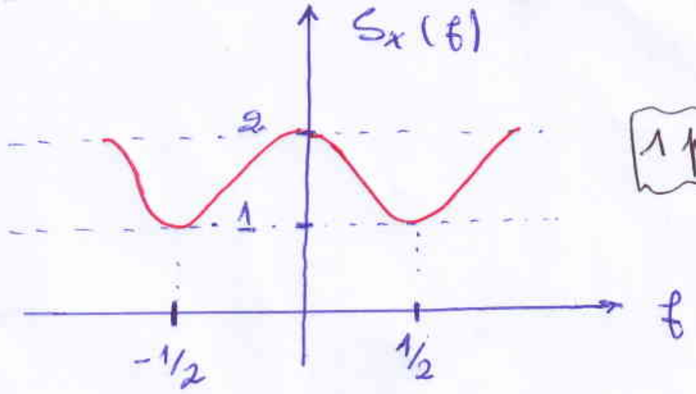
$$S_x(f) = R_x(-1)\, e^{j2\pi f} + R_x(0) + R_x(1)\, e^{-j2\pi f}$$

$$= \frac{1}{2}\, e^{j2\pi f} + 1 + \frac{1}{2}\, e^{-j2\pi f}.$$

$$\boxed{S_x(f) = \cos 2\pi f + 1}$$

(1 points)

$S_x(f) = 1 + \cos 2\pi f$



1 points

$f \in [-1/2 , 1/2]$

à bande limitée

5)- La densité spectrale $S_y(f)$ à la sortie du filtre

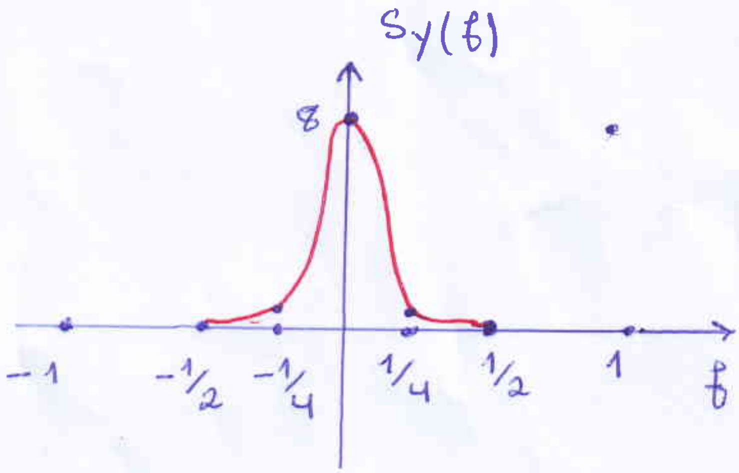
$$S_y(f) = |H(f)|^2 . S_x(f).$$

$$S_y(f) = \frac{1}{\frac{5}{4} - \cos 2\pi f} . (1 + \cos 2\pi f)$$

1 points

$$\boxed{S_y(f) = \frac{1 + \cos 2\pi f}{\frac{5}{4} - \cos 2\pi f}}$$

L'allure de $S_y(f)$.



à $f = 0 \rightarrow S_y(f) = 8$

à $f = \pm 1/2 \rightarrow S_y(f) = 0$

à $f = \pm 1/4 \rightarrow S_y(f) = \frac{4}{5}$

à $f = \pm 1 \rightarrow S_y(f) = 8$

1 points

Solution.2

Application des définitions

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= E[X(t)] = E[f(t,A)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,A)\, T_A(a)\, da && \text{1 points} \\
C_X(t,t') &= E[(X(t)-m_X(t))(X(t')-m_X(t'))^*] && \text{1 points} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [f(t,A)-m_X(t)]\,[f(t',A)-m_X(t')]^*\, T_A(a)\, da \\
\sigma_X^2 &= E[|(X(t)-m_X(t))|^2] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t,A)-m_X(t)|^2\, T_A(a)\, da && \text{1 points}
\end{aligned}
$$

Application des résultats précédents

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a\sin(\omega t+\phi)d\phi = 0 && \text{1 points} \\
m_Y(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a\cos(\omega t+\phi)d\phi = 0 && \text{1 points} \\
C_X(t,t') &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a^2\sin(\omega t+\phi)\sin(\omega t'+\phi)d\phi = 0 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a^2\frac{1}{2}\left[\cos(\omega(t-t')) - \cos(\omega(t'+t)+2\phi)\right]d\phi = 0 \\
&= \frac{a^2}{2}\cos(\omega(t-t')) && \text{1 points} \\
C_Y(t,t') = &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a^2\cos(\omega t+\phi)\cos(\omega t'+\phi)d\phi = 0 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a^2\frac{1}{2}\left[\cos(\omega(t-t')) + \cos(\omega(t'+t)+2\phi)\right]d\phi = 0 \\
&= \frac{a^2}{2}\cos(\omega(t-t')) && \text{1 points} \\
\sigma_X^2 &= C_X(t,t) = \frac{a^2}{2} && \text{1 points} \\
\sigma_Y^2 &= C_Y(t,t) = \frac{a^2}{2} && \text{1 point} \\
C_{XY}(t,t') = &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a^2\cos(\omega t+\phi)\sin(\omega t'+\phi)d\phi = 0 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a^2\frac{1}{2}\left[\sin(\omega(t-t')) + \sin(\omega(t'+t)+2\phi)\right]d\phi = 0 \\
&= \frac{a^2}{2}\sin(\omega(t-t')) && \text{1 points}
\end{aligned}
$$

Pr. CHAMA Zouaoui