Université Djillali Liabès

Département de Télécommunication

Master RT11

Examen Communications numériques avancées

Exercice N°1

Soit un système de transmission en bande large utilisant 4 signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ $s_3(t)$ et $s_4(t)$ de même énergie E tel que $s_1(t) = -s_3(t)$ et $s_2(t) = -s_4(t)$.

1) Représenter les signaux dans l'espace d'Hilbert $L^2[0,T]$; 3/
2) Calculer la probabilité d'erreurs $pe/s_1(t)$ et pe/s_2 sachant qu'à l'entrée du récepteur il y a un bruit gaussien blanc centré additif et de densité spectrale de puissance N_0 ; 4
3) Trouver le récepteur optimal selon le maximum de vraisemblance à postériori ; 1
4) Supposons que $s_1(t)=s_3(t)$ et que $s_2(t)=s_4(t)$, représenter les signaux dans l'espace d'Hilbert $L^2[0,T]$; 1
5) Calculer la probabilité d'erreur $pe/s_i(t)$. 1

Exercice N°2

On suppose un modulateur délivrant le signal suivant :

$$U(t)= A\sum a_k e(t-kT)\cos 2\pi f_0 t$$

On suppose que la modulation utilisée est une MDP2, et que le bruit, à l'entrée du récepteur représenté par un filtre de réponse h(t), est gaussien, additif, centré est de puissance $N_0/2$.

1) Représenter le schéma de transmission en bande de base; 2/
2) On suppose que le milieu est représenté par un filtre c(t) dont la réponse impulsionnelle est $\delta(t-T)$, trouver alors la fonction de transfert C(f). 2
3) Trouver la probabilité d'erreur p_0 dans le cas où :
   - Le filtrage global vérifie Nyquist de façon équirépartie ; 2
   - $C(f) = 1$ pour $-1/T \le f \le +1/T$ ($C(f)$ = TF c(t)) , $E(f)$ = TF (e(t)) et $H(f)$ = TF (h(t)) ;
   - Et que $E(f)*H(f) = T\cos^2\pi fT/2$ pour $-1/T \le f \le +1/T$; 2/
4) Trouver la probabilité d'erreurs p_1 si $H(f) = T^{1/2}$;
5) Trouver la dégradation par rapport à la question n°3. 2/

Dr R. MELIANI

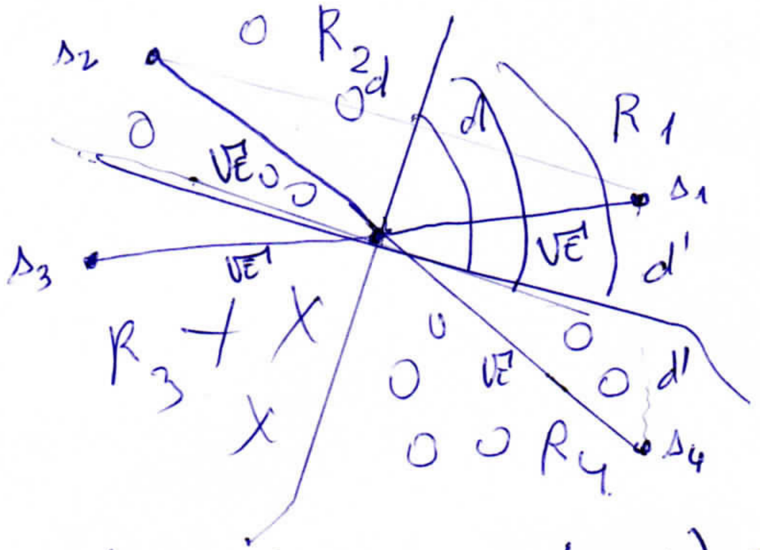
EX N° 1 3 pts

1) $\|s_1\|^2 = \|s_2\|^2 = \|s_3\|^2 = \|s_4\|^2 = E$

$\langle s_1, s_2 \rangle = \sqrt{E}\sqrt{E}\cos(s_1 s_2)$ } $\langle s_1, s_2 \rangle = E r.$

posons $\cos(s_1, s_2) = r$

$s_1 = -s_3 \Rightarrow \widehat{s_1, s_3} = \pi$, $\widehat{s_2, s_4} = \pi$.



4 pts

2°) P_e/s_1? et P_e/s_2.

$(2d)^2 = E + E - 2E\cos(s_1, s_2) = 2E(1-r) \Rightarrow d^2 = \frac{E}{2}(1-r)$

$(2d')^2 = 2E - 2E\cos(s_1, s_4) = 2E - 2E\cos[\pi + \widehat{s_1, s_2}] = 2E(1+r)$

$= 2E + 2E\cos(s_1, s_2)$

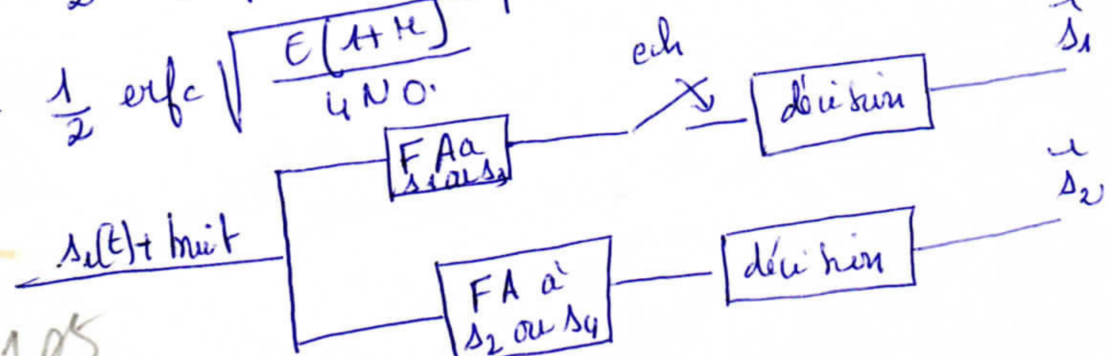
$d'^2 = \frac{E}{2}(1+r)$

$$P_e/s_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\sqrt{\frac{\frac{E}{2}(1-r)}{2N_0}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\sqrt{\frac{E(1-r)}{4N_0}}$$

$$P_e/s_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\sqrt{\frac{E(1+r)}{4N_0}}$$

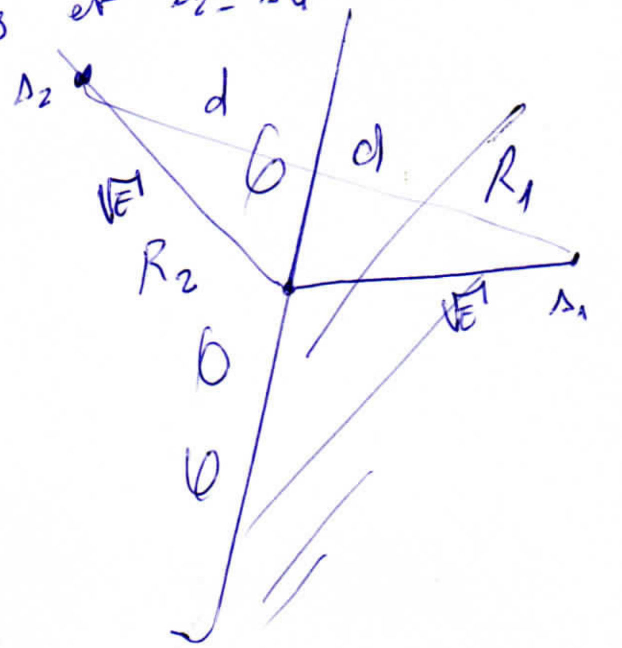
3°)



1 pts

4°) 1 pts

$s_1 = s_3$ et $s_2 = s_4$



5°) 1 pts

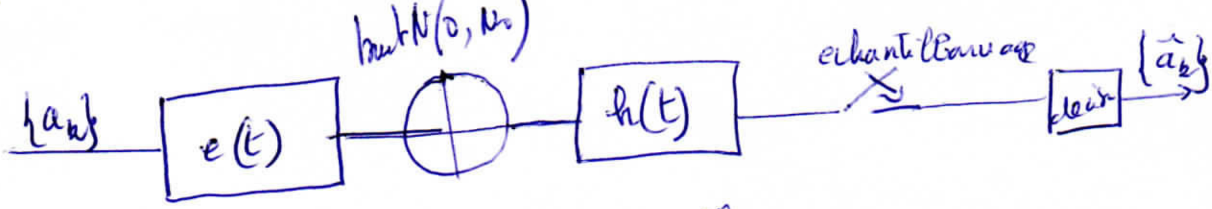
$\langle s_1, s_2 \rangle = E \cos(s_1, s_2)$

$(2d)^2 = E + E - 2E\cos(s_1, s_2) = 2E - 2E r = 2E(1-r) \Rightarrow$

$d^2 = \frac{E}{2}(1-r) \Rightarrow P_e/s_i = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\sqrt{\frac{E(1-r)}{4N_0}}$

2) Exercice N° 2.

2 pts 1)



2 pts 2) $c(f) = TF[e(t)] = TF[\delta(t-T)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-T) \exp -2\pi j f t \, dt$

posons $t' = t - T \Rightarrow t = t' + T \Rightarrow dt = dt' \Rightarrow c(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t') \exp -2\pi j f (t'+T) \, dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t') \exp -2\pi j f t' \exp -2\pi j f T \, dt' = \exp -2\pi j f T \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t') \exp -2\pi j f t' \, dt'}_{=1}$$

$\Rightarrow c(f) = \exp -2\pi j f T$

2 pts 3) $E(f) \cdot H(f) = T \cos^2 \pi f T/2$ et en même temps équirépartie $\Rightarrow$

$E(f) = H(f) = T^{1/2} \cos \pi f \frac{T}{2}$

$P_0 = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{A^2}{2\gamma_b(f)}}$ $\quad \gamma_b(f)$: Densité spectrale de puissance en sortie de $h(t)$

$$\gamma_b(f) = \int_{-1/T}^{+1/T} N_0 \left| T^{1/2} \cos \pi f \frac{T}{2} \right|^2 df = N_0 \int_{-1/T}^{+1/T} T \cos^2 \pi f \frac{T}{2} \, df$$

$$= \frac{N_0 T}{2} \int_{-1/T}^{+1/T} (1 + \cos \pi f T) \, df = \frac{N_0 T}{2} \left[\int_{-1/T}^{+1/T} df + \int_{-1/T}^{+1/T} \cos \pi f T \, df \right]$$

$$\frac{N_0 T}{2} \left[\frac{2}{T} + \underbrace{\sin \pi f T \Big|_{-1/T}^{+1/T}}_{=0} \right] = N_0$$

(11) suite

ENDRT11 (suite)

La puissance $P = \frac{A^2}{2T} \int_{-1/T}^{+1/T} |E(f)|^2 df.$

$$= \frac{A^2}{2T} \int_{-1/T}^{+1/T} T \cos^2 \pi f \frac{T}{2} df = \frac{A^2 T}{2T} \left[\int_{-1/T}^{+1/T} \left(\frac{1 + \cos \pi f T}{2} \right) df \right.$$

$$\frac{A^2 T}{4T} \left[\int_{-1/T}^{+1/T} df + \underbrace{\int_{-1/T}^{+1/T} \cos \pi f T df}_{= 0} \right]$$

$$\frac{A^2 \cancel{T}}{\cancel{4}T} \left[\frac{\cancel{2}}{\cancel{T}} \right] = \frac{A^2}{2T} = P \Rightarrow A^2 = 2PT$$

$$P_0 = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{2PT}{2N_0}} = \boxed{\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{PT}{N_0}}}$$

2 pts

4°) $P_1 = ?$

$$H(f) = T^{1/2} \Rightarrow E(f) = T^{1/2} \cos^2 \pi f \frac{T}{2}$$

$$\sigma_b(t) = \int_{-1/T}^{+1/T} N_0 |H(f)|^2 df = N_0 \int_{-1/T}^{+1/T} T df = N_0 T \left(\frac{2}{T} \right) = 2 N_0$$

$$P = \frac{A^2}{2T} \int_{-1/T}^{+1/T} T \cos^4 \pi f \frac{T}{2} df = \frac{A^2 T}{2T} \int_{-1/T}^{+1/T} \left(\frac{1 + \cos \pi f T}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos \pi f T}{2} \right) df$$

$$\frac{A^2 \cancel{T}}{2 \cancel{T} \cdot 4} \left[\int_{-1/T}^{+1/T} df + 2 \int_{-1/T}^{+1/T} \cos \pi f T df + \int_{-1/T}^{+1/T} \cos^2 \pi f T df \right]$$

EDD RT11 (suite

$$\frac{A^2}{8}\left[\frac{2}{T}+0+\frac{1}{2}\int_{-1/T}^{+1/T}(1+\cos\pi fT)\,df\right]=$$

$$\frac{A^2}{8}\left[\frac{2}{T}+\frac{1}{T}\right]=\frac{A^2}{8}\left[\frac{3}{T}\right]=P=\frac{3A^2}{8T}\Rightarrow\frac{8PT}{3}=A^2$$

$$P_1=\frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\sqrt{\frac{\frac{8PT}{3}}{2\cdot2N_0}}=\frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\sqrt{\frac{8PT}{3\cdot2\cdot2\cdot N_0}}$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\sqrt{\frac{2PT}{3N_0}}}$$

2pts 5°) $\Delta dB=10\log_{10}\dfrac{\frac{3\cancel{N_0}}{2\cancel{PT}}}{\frac{\cancel{N_0}}{\cancel{PT}}}=\boxed{10\log_{10}\frac{3}{2}}$