Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbes
Faculté de Génie Electrique
Département de Télécommunications
Master Académique 1
Spécialité : Télécommunications
Option : Systèmes de télécommunications

Examen

Exercice 1

On compte dans une population 45% d'hommes et 55% de femmes. Un homme sur trois porte des lunettes et une femme sur cinq porte des lunettes.
Quelle est la probabilité qu'une personne portant des lunettes soit une femme ?

Exercice2

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi, de densité de probabilité commune p où :

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{3\,x^2}{\theta^3} & si\ x \in [0, \theta]\ avec\ \theta\ \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On pose : $S = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ T = max(X_i), i = 1, \dots, n.$
1/ Trouver $E(S)$ et $Var(S)$.
2/ Déterminer la loi de T.

Exercice3

Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre ($p \in]0,1[$). Soient $U = X + Y,\ V = X - Y$. Déterminer :
a/ La loi du couple (U, V) $p_{U,V}(u, v)$ ainsi que les lois marginales $p_U(u), p_V(v)$
b/ Le coefficient de corrélation $\rho_{U,V}$
c/ U et V sont-elles indépendantes ? Conclusion ?

Exercice4

Soit Xune variable aléatoire de densité de probabilité définie par :

$$p(x) = \begin{cases} k\,e^{-x} & si\ x \geq -1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Déterminer k.
2. Trouver $E(X)$ et $Var(X)$.
3. Déterminer la loi de $Y = X^2$.

Corrigé type
Signaux Aléatoires et Processus Stochastiques

Exercice N° 1

Population $\xrightarrow{0,45}$ H $\xrightarrow{1/3}$ L $\longrightarrow$ $P(H \cap L) = 0,45 \times 1/3$

Population $\xrightarrow{0,45}$ H $\xrightarrow{2/3}$ $\bar{L}$ $\longrightarrow$ $P(H \cap \bar{L}) = 0,45 \times \frac{2}{3}$

Population $\xrightarrow{0,55}$ F $\xrightarrow{1/5}$ L $\longrightarrow$ $P(F \cap L) = 0,55 \times \frac{1}{5}$

Population $\xrightarrow{0,55}$ F $\xrightarrow{4/5}$ $\bar{L}$ $\longrightarrow$ $P(F \cap \bar{L}) = 0,55 \times \frac{4}{5}$

$$P(L) = P(H \cap L) + P(F \cap L) = 0,45 \times \frac{1}{3} + 0,55 \times \frac{1}{5} = 0,26$$

$$P(F|L) = \frac{P(F \cap L)}{P(L)} = \frac{0,55 \times 1/5}{0,26} = 0,423$$

H : Homme ; F : Femme ; L : porte des lunettes ; $\bar{L}$: ne porte pas des lunettes

Exercice N° 2

$X_1, \ldots X_n$: n variables indépendante et de même loi de d.d.p commune

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{\theta^3} x^2 & \text{si } x \in [0, \theta] \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad , \quad T = \sup_{1 \leq i \leq n} (X_i)$$

1/ Les VA étant indépendantes et de même loi

$E(S) = n E(X_i) \quad ; \quad V(S) = n Var(X_i)$

$$E(X_i) = \int_0^\theta x \frac{3x^2}{\theta^3} dx = \frac{3}{\theta^3} \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^\theta = \frac{3}{4} \theta$$

$$E(S) = \frac{3n\theta}{4}.$$

$. \; Var(X_1) = E(X_1^2) - E^2(X_1)$

$$E(X_i^2) = \int_0^\theta x^2 \frac{3}{\theta^3} x^2 dx = \frac{3}{\theta^3} \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^\theta = \frac{3}{5} \theta^2$$

$$Var(X_i) = \frac{3}{5}\theta^2 - \frac{9}{16}\theta^2 = \frac{3\theta^2}{80} \quad , \quad Var(S) = \frac{3n\theta^2}{80}.$$

2/ $T(\Omega) = [0, \theta]$

soit $t \in [0, \theta]$, T étant un $\overset{max}{\sup}$, on considère l'événement.

$$[T < t] = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i < t)$$

$$P(T < t) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i < t) \quad \text{car les VAs sont indépendantes}$$

$$= \left(\int_0^t \frac{3}{\theta^3} x^2 dx \right)^n = \left(\frac{t}{\theta} \right)^{3n}$$

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \left(\frac{t}{\theta}\right)^{3n} & \text{si } t \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } t > \theta \end{cases}$$

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{dF_T(t)}{dt} = \frac{3n}{\theta^{3n}} t^{3n-1} & \text{si } t \in [0, \theta] \\ 0 & \text{si } t \notin [0, \theta] \end{cases}$$

Exercice N° 3

- X et Y sont des VA de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

$X(\Omega) = Y(\Omega) = [0,1]$ avec $P(X=0) = P(Y=0) = 1-p$.

$P(X=1) = P(Y=1) = p$.

- $U = X+Y$; $V = X-Y$

$U(\Omega) = \{0,1,2\}$; $V(\Omega) = \{-1,0,1\}$

Et pour $(i,j) \in U(\Omega) \times V(\Omega)$

- $P_{ij} = P(U=i \cap V=j) = P(X+Y=i \cap X-Y=j) = P(X = \frac{i+j}{2}) \cdot P(Y = \frac{i-j}{2})$

- Faire un tableau qui permet d'avoir la loi jointe (U,V) et les lois marginaux.

(a)

$i \backslash j$	-1	0	1	$P(U=i)$
0	0	$(1-p)^2$	0	$(1-p)^2$
1	$p(1-p)$	0	$p(1-p)$	$2p(1-p)$
2	0	p^2	0	p^2
$P(V=j)$	$p(1-p)$	$p^2+(1-p)^2$	$p(1-p)$	1

(b) $\mathrm{cov}(U,V) = 0 \Rightarrow \rho_{U,V} = 0$

(c) Il est évident que U et V ne sont pas indépendantes, car par exemple :
$P_{0,-1} = 0 = P(U=0 \cap V=-1) \neq P(U=0)\,P(V=-1)$

Bien que U et V sont décorrélées, mais ne sont pas indépendantes

Exercice N°4

1) On doit avoir : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$; (f étant de plus positive si $k \geq 0$)

f doit être aussi sur $[-1,+\infty[$.

* Soit $\int_{-1}^{+\infty} k e^{-x}\,dx = k\left(-e^{-x}\right)_{-1}^{\infty} = ke = 1$: on prend $k = \frac{1}{e}$

Ds ce cas $f(x) = \begin{cases} e^{-(x+1)} & si\ x \geq -1 \\ 0 & si\ x < -1 \end{cases}$

On peut de plus préciser la fction de répartition de X.

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

• $F_X(x) = 0$ si $x \leq -1$

Et pour $x \geq -1$, $F_X(x) = \int_{-1}^{x} e^{-(t+1)}\,dt = \left[-e^{-(t+1)}\right]_{-1}^{x}$

• $F_X(x) = 1 - e^{-(x+1)}$

xx 2) $E(X) = 0$, $V(X) = 1$

3) si $Y = X^2$ $(Y \in \mathbb{R}^+)$ et ainsi $F_Y(y) = 0$ si $y < 0$

Pour $y \geq 0$ $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y})$

$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

x

Deux cas se présentent :

1er cas : $y \in [0,1]$ alors $-\sqrt{y} \geq -1$ et

$F_Y(y) = \left(1 - e^{-(\sqrt{y}+1)}\right) - \left(1 - e^{-(1-\sqrt{y})}\right) = \frac{1}{e}\left(e^{\sqrt{y}} - e^{-\sqrt{y}}\right)$

x $F_Y(y) = \frac{2}{e}\,sh(\sqrt{y})$

2ème cas : $y \geq 1$; alors $-\sqrt{y} < -1 \Rightarrow F_X(-\sqrt{y}) = 0$

x $F_Y(\sqrt{y}) = 1 - e^{-(1+\sqrt{y})}$

On obtient une densité de Y par dérivation de F_Y sur $[0,+\infty[$

$f_Y(y) = 0$ si $y < 0$ $\begin{cases} f_Y(y) = \frac{1}{e\sqrt{y}}\,ch(\sqrt{y}) & y \in [0,1] \\ f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\,e^{-(1+\sqrt{y})} & pour\ y \geq 1 \end{cases}$