Exercice N°1 (au choix)

Un signal modulé linéairement en amplitude $u(t)$peut s'écrire : $u(t) = Re\{u_e(t)e^{j2\pi f_0 t}\}$
Où $u_e(t)$ est l'enveloppe complexe qui est dans ce cas réelle.

1) Est-ce que le signal $u(t)$est stationnaire au sens large (SSL). Montrer qu'il est cyclostationnaire.
2) Montrer que l'opération de moyennage de la fonction d'autocorrélation $R_u(t,\tau)$ sur une période $T_0 = \frac{1}{2f_0}$ permet de stationnariser le signal $u(t)$.
3) Montrer que l'ajout d'une phase aléatoire au signal modulé permet de stationnariser le signal $u(t)$.

Exercice N°1 (au choix)

Un système CDMA consiste en 15 utilisateurs ayant la même puissance, et transmettant de l'information avec un débit de 10000 bits/sec. Chacun d'eux utilise un signal d'étalement de spectre à séquence directe d'un débit par chip de 1 MHz. La modulation utilisée étant la BPSK.

a. Déterminer $SNR = \frac{E_b}{N_J}$, où N_J est la densité spectrale d'énergie de l'interférence.
b. Quel est le gain de traitement (d'étalement).
c. De combien doit-on augmenter le gain de traitement pour pouvoir doubler le nombre des utilisateurs sans changer le SNR à la sortie.

Exercice 2

On considère un système de transmission numérique où la source de message délivre le signal $A\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k\delta(t-kT)$ où A et T sont des constantes, $\delta(t$ désigne la distribution de Dirac, et les $\{a_k\}$ sont des symboles binaires mutuellement indépendants prenant des valeurs ± 1 avec la même probabilité. Le bruit $B(t)$ est additif, blanc, gaussien, centré, indépendant du signal, de densité spectrale de puissance bilatérale $N_0/2$. Les filtres d'émission et de réception, de fonction de transfert respectives $E(f)$ et $R(f)$, vérifient la relation $E(f)R(f) = G(f)$, $G(f)$ ayant pour expression :

$$G(f) = \begin{cases} -2T & si \quad |f| \leq \frac{1}{2T} \\ T & si \quad \frac{1}{2T} \leq |f| \leq \frac{1}{T} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1) Montrer que $G(f)$vérifie le critère de Nyquist au pas T.
2) Comment faut-il choisi $E(f)$ et $R(f)$ pour que la probabilité d'erreur soit minimale ?
   On appelle P_e cette probabilité d'erreur, alors exprimer P_e en fonction de la puissance moyenne émise P_m, de N_0 et de T.
3) Quelle est la dégradation du rapport signal à bruit par rapport à la répartition optimale du filtrage.

Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbes
Faculté de Génie Electrique
Département de Télécommunications
Master Académique 1
Spécialité : Télécommunications
Option : Systèmes de télécommunications

Examen

Questions de cours (choix entre A et B)

A. Le signal reçu, sous forme matricielle, pour un système MIMO ($N_t \times N_r$) est donné par :

$$r = H\,s + z$$

Avec : $s = [s_1, s_2, \dots, s_{N_t}]^T$; $z = [z_1, z_2, \dots, z_{N_r}]^T$; $r = [r_1, r_2, \dots, r_{N_r}]^T$; $H = \begin{bmatrix} h_{1,1} & \cdots & h_{1,N_t} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ h_{N_r,1} & \dots & h_{N_r,N_t} \end{bmatrix}$

z est un vecteur aléatoire Gaussien $z \to \aleph(\mu, R_{zz})$ dont ces éléments scalaires sont des variables aléatoires indépendants et identiquement distribuées (IID) $z_i \to \aleph(\mu_i, \sigma^2)$. la matrice de covariance est égale à : $R_{zz} = E[(z-\mu)(z-\mu)^T]$, et $\mu = E(z)$. Dans le cas où les éléments de z sont IID et centrés $R_{zz} = \sigma^2\, I_{N_r}$.

La capacité d'un système MIMO est définie par :

$$C_{MIMO} = \max_{p_S(s_1, s_2, \dots, s_{N_t})} \{H(r) - H(z)\}$$

Où la maximisation est effectuée sur $p_S(s_1, s_2, \dots, s_{N_t})$ (les lois de probabilités de la variable multidimensionnelle s).

L'entropie, étant reliée à l'information mutuelle, est définie par :

$$H(z) = -E\{ln(p_z(z))\}$$

Calculer la capacité d'un système MIMO ($N_t \times N_r$) pour des signaux réels.

B. Soit un signal déterministe $x(t)$ supposé à bande étroite, d'enveloppe complexe $x_e(t)$, qui est filtré par un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$. Soit $y(t)$ la réponse à ce filtre.

1. Déterminer la réponse en fréquence du signal analytique $Y_a(f)$ (transformée de Fourier de $y_a(t)$).
2. Déterminer la réponse en fréquence de l'enveloppe complexe $Y_e(f)$ (transformée de Fourier de $y_e(t)$).
3. Donner la fonction de transfert du filtre passe bas équivalent en bande de base $H_b(f)$.

Question de cours (PARTIE A)

Voir le cours

Questions de cours (PARTIE B)

B/ On a les relations suivantes, qui traduisent l'effet du filtre sur le signal d'entrée

$$Y(f) = H(f).X(f)$$

1/ $Y_a(f) = 2\cancel{Y}(f)\ u(f)$

$X_a(f) = 2X(f)\ u(f)$

$H_a(f) = 2H(f)\ u(f)$

$$Y_a(f) = 2H(f).X(f)\ u(f) = H(f)\ X_a(f)$$

$$Y_a(f) = H_a(f).X(f)$$

2/ $y_e(t) = y_a(t)\,e^{-j2\pi f_0 t} \Rightarrow Y_e(f) = Y_a(f+f_0)$

$\Rightarrow Y_e(f) = 2H(f+f_0)\ X(f+f_0)\ u(f+f_0)$

$= H(f+f_0)\ X_e(f) = H^+(f+f_0)\ X_e(f) = H_b(f)\ X_e(f)$

$Y_e(f) = H_e(f)\ X(f+f_0)$

3/ $Y_e(f) = H_b(f)\,X_e(f)$ Avec donc : $H_b(f) = H^+(f+f_0)$

$H_b(f)$ est le filtre passe bas équivalent en bande de base.

Exercice N° 1 (au choix)

Un signal modulé linéairement en amplitude u(t) peut s'écrire :

$$u(t) = Re\left(u_e(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \right)$$

Où $u_e(t)$ est l'enveloppe complexe du signal modulé qui est ds ce cas réelle.

1/ Le signal u(t) n'est plus stationnaire car sa fct d'autocorrélation dépend de t et de τ :

$$R_u(t,\tau) = E\left[u(t)\, u(t-\tau) \right] = E\left[u_e(t) \cos(2\pi f_0 t)\; u_e(t-\tau) \cos(2\pi f_0 (t-\tau)) \right]$$

$$R_u(t,\tau) = \frac{1}{2} R_{u_e}(\tau) \left[\cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0 (2t-\tau)) \right]$$

2/ La fct d'autocorrélation $R_u(t,\tau)$ du signal modulé u(t) est périodique par rapport au temps t (période $T_0 = \frac{1}{2 f_0}$), ainsi que son moment d'ordre 1. Le signal u(t) est dit cyclostationnaire au sens large (SSL)

3/ Pour un tel signal, on définit sa fct d'autocorrélation moyenne par la relation

$$\bar{R}_u(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} R_u(t,\tau)\, dt = \frac{1}{2} R_{u_e}(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau)$$

Cette opération de moyennage de la fct d'autocorrélation permet de stationnariser le signal u(t).

3/ L'ajout d'une phase aléatoire φ, équirépartie sur $[0, 2\pi]$ à l'onde porteuse permet aussi de stationnariser le signal u(t) :

$$u(t) = Re\left\{ u_e(t)\, e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} \right\}$$

Sa fct d'autocorrélation est égale à :

$$E[u(t)u(t-\tau)] = \frac{1}{2} R_{u_e}(\tau) . E\left[\cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0 (2t-\tau) + 2\varphi) \right]$$

Du fait que φ est équirépartie sur $[0, 2\pi]$: $E\left[\cos(2\pi f_0 (2t-\tau) + 2\varphi) \right] = 0$

La fct d'autocorrélation du signal u(t) est finalement égale à :

$$R_u(\tau) = \frac{1}{2} R_{u_e}(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) .$$

Exercice N° 1 (au Choix)

a) Nous avons $N_u = 15$ utilisateurs transmittant avec un débit de 10 000 bps (chacun), ds une bde de Largeur $W = 1$ MHZ (1 M chips/s) $= 10^6$ Chips/sec.

N_J : Densité Spectrale d'énergie de l'interférence multi-utilisateur

$$SNR = \frac{E_b}{N_J} = \frac{P_s T_b}{P_J T_c} = \frac{P_s}{R} \cdot \frac{W}{P_J} \quad ; \quad W = \frac{1}{T_c}, \quad R = \frac{1}{T_b}.$$

$$= \left(\frac{W}{R}\right) \cdot \left(\frac{P_s}{P_J}\right)$$

D'autre part on a : $\frac{P_s}{P_J} = \frac{P_s}{P_s(N_u - 1)} = \frac{1}{N_u - 1}$

Donc : $\frac{E_b}{N_J} = \frac{W}{R} \cdot \frac{1}{(N_u - 1)} = \frac{10^6}{10^4} \cdot \frac{1}{(15-1)} = \frac{100}{14} = 7,14$ (8,54 dB)

b) Gain de traitement : $\frac{W}{R} = \frac{T_b}{T_c} = 100$.

c) Avec $N_u = 30$ utilisateurs et $\frac{E_b}{N_J} = 7,14$

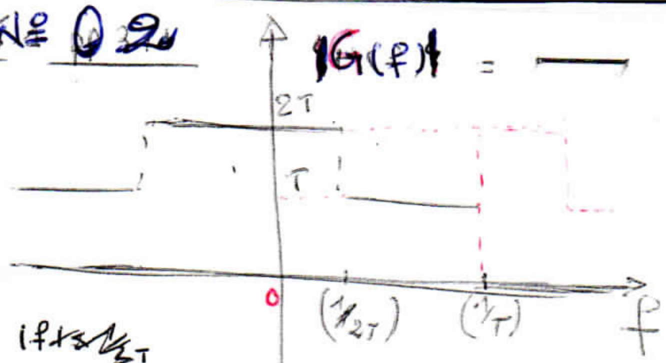
Le gain de traitement doit augmenter de

$$\frac{W}{R} = (E_b/N_J)\,[N_u - 1] = 7,14.(29) = 207.$$

$W = 207 . 10^4 = 2,07$ MHZ.

Exercice N° 2

1/ Spectre est $|f| \le \frac{1}{T}$



$-2T \, f\Big|_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} + T f\Big|_{-\frac{1}{2T}}^{-\frac{1}{2T}} + f\Big|_{\frac{1}{2T}}$

$-2T\frac{1}{T} + T\left(-\frac{1}{2T}+\frac{2\,1}{2T}\right)+\frac{2\,1}{2T}-\frac{1}{2T}\,T$

$-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

$q \in \left\{-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}\right\}$.

$|f| \le \frac{1}{2T}$

1) cas qu'il est est ds $|f| \le \frac{1}{2T}$. Effectivement $-2T$ $|f| \le \frac{1}{2T}$ vérifie critère de Nyquist au pas T.

$H(f) =$
$= -2T\frac{1}{T} + \frac{T}{2T} + \frac{T}{2T} = 1$

2) $E(f) = R(f) = \sqrt{|G(f)|}$

$a(t) = d\sum a_k\, \delta(t-kT)$ $\longrightarrow \boxed{E(f)} \xrightarrow{e(t)}$ $\boxed{A = d}$

$\gamma_e(f) = \int \gamma_a(f)\,|E(f)|^2\,df = \int \gamma_a(f)\,|H(f)|\,df$

$P_m = \int \gamma_e(f)\,df$

$\gamma_a(f) = \frac{\sigma_a^2}{T}(A^2) = \frac{A^2}{T}$

2pb 1/ G(f) vérifie Nyquist

$P_m = \int \gamma_e(f)\,df = \frac{d^2}{T}2\int_0^{1/T} = \frac{2d^2}{T}\left(\int_0^{1/2T} 2T\,df + \int_{1/2T}^{1/T} T\,df\right)$

$= \frac{2d^2}{T}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3d^2}{T}$

$\frac{P_m T}{3} = A^2$

$\sigma^2 = \frac{N_0}{2}\int |R(f)|^2\,df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|\,df$

$= \frac{N_0}{2}\,2\int_0^{1/T} = N_0\left[\int_0^{1/2T} 2T\,df + \int_{1/2T}^{1/T} T\,df\right]$

$\sigma^2 = N_0\left[1+\frac{1}{2}\right] = N_0\left(\frac{3}{2}\right)$

$P_e = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{A}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{\frac{P_m T}{3}}{N_0\frac{3}{2}\,2}}\right)$

$= \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{P_m}{9 D N_0}\right)$

3) Donc la dégradation par rapport à $CS_2(f)$ équirépartie est $10\log(9)$.

Cette dégradation est due à la fonction $G(f)$ qui n'est pas positive et donc pas égale à son module.